

V.C. UNIFORME

La **v.c. discreta UNIFORME** descrive il modello probabilistico dell'*equiprobabilità*.

I valori della v.c.U. sono dati dai primi n numeri naturali:

$$x = 1, 2, \dots, (n-1), n$$

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{1}{n}$$

Sono soddisfatte le due condizioni affinché X sia una v.c.; infatti:

$$p(x) \geq 0$$

e

$$\sum_{x=1}^n p(x) = 1$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$VAR(X) = M(X^2) - E^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

MODA(X): la distribuzione Uniforme è zeromodale.

ESERCIZIO

Descrivere con una v.c. il punteggio ottenibile nel lancio di un dado.

SOLUZIONI

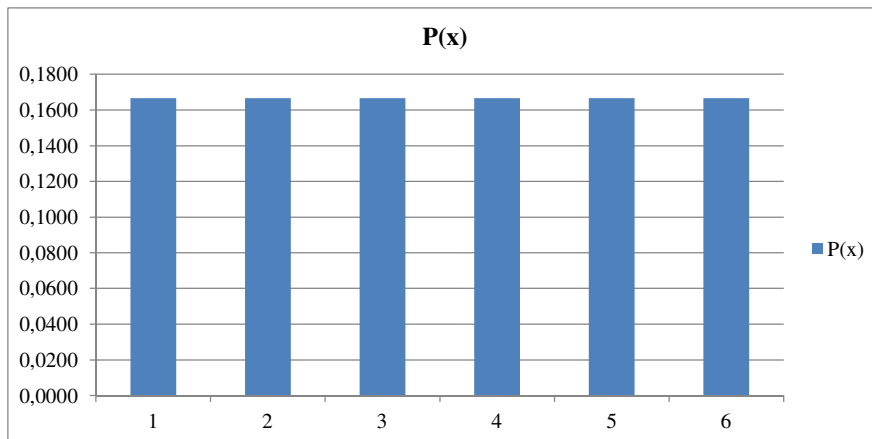
X v.c. uniforme con $n=6$: $X=1,2,\dots,6$ con $P(X)=1/6$

x	P(x)	x*P(x)	x ² *P(x)
1	0,1667	0,16667	0,16667
2	0,1667	0,33333	0,66667
3	0,1667	0,50000	1,50000
4	0,1667	0,66667	2,66667
5	0,1667	0,83333	4,16667
6	0,1667	1	6,00000
1,0000		3,5	15,1667

$$\text{VAR}(X) = 2,91667$$

$$E(X) = 3,5 = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{VAR}(X) = 15,1667 - (3,5)^2 = \frac{n^2 - 1}{12}$$



V.C. BINOMIALE o SCHEMA BERNOULLIANO o SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE CON REINSERIMENTO

La **v.c. BINOMIALE** X descrive il numero di volte in cui accade l'evento E , di probabilità costante p ($: P(E)=p$), nelle n prove eseguite tutte nelle medesime condizioni (n prove indipendenti).

$$x = 0, 1, 2, \dots, (n-1), n$$

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Con $\sum_{x=0}^n P(x) = 1$ essendo X una v.c. discreta.

Media aritmetica: **$E(x)=np$**

Varianza: **$V(x)=npq$**

Moda: **$E(x)-q=np-q \leq \text{MODA}(x) \leq np+p=E(x)+p$**

La v.c. Binomiale dipende dal valore dei due parametri **n** e **p** .

Quando n è abbastanza elevato ($n \rightarrow +\infty$) la v.c. B. converge alla v.c. Normale.

ESERCIZIO

Si consideri il seguente esperimento binomiale: si lancia 5 volte un dado e si conta quante volte esce la faccia con il numero 4.

Per questo esperimento binomiale si dica quali sono il successo, l'insuccesso, p , q , e si descriva tale variabile casuale binomiale (valori assunti e funzione di probabilità).

SOLUZIONI

Successo= esce 4 in un lancio.

Insuccesso= esce una qualunque altra faccia (1,2,3,5 o 6).

$$p=1/6$$

$$q=1-p=5/6$$

Tale v.c. Binomiale assume i seguenti valori: $x=0,1,2,3,4,5$. Infatti è $n=5$ il numero delle prove.

$$P(x) = \binom{5}{x} (1/6)^x (5/6)^{5-x}$$

ESERCIZIO

Costruire una variabile casuale capace di descrivere il numero di teste che si ottengono ripetendo per $n=6$ volte il lancio di una moneta ideale; calcolarne inoltre la media e la varianza sia usando i parametri della variabile sia operando su di essa.

SOLUZIONI

Si tratta di una v.c. binomiale X di parametri $n=6$ e $p=1/2=0,5$: infatti le prove consistenti nel lancio della moneta sono fra di loro indipendenti e il *successo* è dato dall'ottenere *testa*:

p = probabilità di ottenere testa nella singola prova = $P(\text{Testa})=1/2=0,5$ con $p=0,5$ costante in ogni prova.

Operando sui parametri di X :

$$E(x) = np = 6 * 0,5 = 3$$

$$V(x) = npq = 6 * 0,5 * 0,5 = 1,5$$

Operando sulla v.c. discreta:

$$E(x) = \sum_{x=0}^6 xp(x) = \sum_{x=0}^6 x \binom{6}{x} (0,5)^x (0,5)^{6-x} = (0,5)^6 \sum_{x=0}^6 x \binom{6}{x} = 0,015625 * 192 = 3$$

$$M(x^2) = \sum_{x=0}^6 x^2 p(x) = \sum_{x=0}^6 x^2 \binom{6}{x} (0,5)^x (0,5)^{6-x} = (0,5)^6 \sum_{x=0}^6 x^2 \binom{6}{x} = 0,015625 * 672 = 10,5$$

$$V(x) = 10,5 - (3)^2 = 1,5$$

ESERCIZIO riguardante la v.c. Binomiale e la sua convergenza alla v.c. Normale

Sia X una variabile casuale binomiale con $p=0,35$.

- a) porre $n=10$ e calcolare $P(x=3)$; $P(x \geq 7)$; $P(3 \leq x \leq 5)$.
- b) Porre $n=1000$ e calcolare $P(x=300)$; $P(x \geq 700)$; $P(349 \leq x \leq 351)$.

SOLUZIONI

- a) si tratta di una v.c. Binomiale di parametri $p=0,35$ e $n=10$.

$$P(x=3) = \binom{10}{3} 0,35^3 0,65^7 = 0,2522$$

$$P(x \geq 7) = P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10) = 0,026$$

$$P(3 \leq x \leq 5) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = 0,6435$$

- b) Una v.c. Binomiale di parametri $p=0,35$ e $n=1000$, numero delle prove molto elevato, potrebbe convergere ad una v.c. Normale. Per verificarlo consideriamo la quantità npq : se npq è maggiore di 10 si può affermare che la variabile in considerazione converge ad una v.c. Normale.

$npq = 1000 * 0,35 * 0,65 = 227,5 > 10$ quindi la v.c. Binom X converge ad una v.c. Normale X di parametri:

$$E(x) = np = 1000 * 0,35 = 350 \text{ e } V(x) = npq = 227,5 \text{ } (\sigma = 15,08).$$

Per calcolare la probabilità di X nei vari intervalli richiesti bisogna fare la *correzione di continuità* poiché, con la convergenza, si è passati da una v.c. discreta (la Binomiale) ad una v.c. continua (la Normale).

$$P(x=300) = P(299,5 \leq x \leq 300,5) = P\left(\frac{299,5 - 350}{15,08} \leq z \leq \frac{300,5 - 350}{15,08}\right) =$$

$$= P(-3,35 \leq z \leq -3,28) = P(+3,28 \leq z \leq +3,35) = P(-\infty \leq z \leq 3,35) - P(-\infty \leq z \leq 3,28) =$$

$$= 0,9996 - 0,9995 = 0,0001 \approx 0$$

$$P(x \geq 700) = P(x > 699,5) = P\left(z > \frac{699,5 - 350}{15,08}\right) = P(z > 23,18) = 1 - P(-\infty < u < 23,18) =$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$P(349 \leq x \leq 351) = P(348,5 < x < 351,5) = P\left(\frac{348,5 - 350}{15,08} < z < \frac{351,5 - 350}{15,08}\right) =$$

$$= P(-0,1 < z < +0,1) = 2 * [P(-\infty < z < +0,1) - 0,50] =$$

$$= 2 * (0,5398 - 0,50) = 2 * 0,0398 = 0,0796$$

V.C. IPERGEOMETRICA o SCHEMA DELLE PROVE RIPETUTE SENZA REINSERIMENTO (O IN BLOCCO)

Una certa popolazione sia composta di N elementi dei quali C portatori di una data caratteristica, mentre i restanti $N-C$ ne siano privi. Da questa popolazione si supponga di estrarre senza reinserimento n elementi.

Allora la v.c. **IPERGEOMETRICA** X descrive il numero di elementi del campione estratto che presentano la caratteristica in esame, ovvero X descrive il numero di volte in cui si presenta la caratteristica in esame nelle n prove dipendenti (o prove esaustive).

$$x = 0, 1, 2, \dots, (n-1), n \text{ (con } n \leq C)$$

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{\binom{C}{x} \binom{N-C}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Oppure:

$$P(x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Con $\sum_{x=0}^n P(x) = 1$ essendo X una v.c. discreta.

La v.c. Ipergeometrica dipende dal valore dei tre parametri N , C (oppure $p=C/N$) e n .

Media aritmetica: $E(x)=np$

Varianza: $V(x) = npq \frac{(N-n)}{(N-1)}$

Dove $\frac{(N-n)}{(N-1)}$ è detto *fattore di correzione*.

$\text{Var}(\text{v.c. Binomiale})=npq > \text{Var}(\text{v.c. Ipergeometrica})= npq \frac{(N-n)}{(N-1)}$

Quando $N \rightarrow +\infty$ il *fattore di correzione* tende all'unità e quindi:

$\text{Var}(\text{v.c. Binomiale})=npq = \text{Var}(\text{v.c. Ipergeometrica})$.

Inoltre, quando la dimensione della popolazione è infinita (nella pratica, quando $N > 10000$) allora la v.c. Ipergeometrica **converge** alla v.c. Binomiale.

ESERCIZIO

Un corso di algebra è frequentato da 30 studenti, 16 uomini e 14 donne. Assumendo che tutti gli studenti frequentino il corso e che entrino nella classe a caso in modo indipendente dal fatto che siano uomini o donne, qual è la probabilità che i primi cinque studenti che entrano siano donne?

SOLUZIONI

Si tratta di uno schema Ipergeometrico con

$N=30$; $C=14$ (donne); $N-C=30-14=16$ (no donne, ovvero uomini); $n=5$.

$$P(x=5) = \frac{\binom{14}{5}}{\binom{30}{5}} \binom{16}{0} = 0,014$$

ESERCIZIO

Gli amministratori di una università vogliono mandare 8 studenti iscritti agli ultimi anni ad un convegno nazionale. Si presentano volontari 12 iscritti al terzo anno e 8 laureandi. I loro nomi vengono messi in un cappello e mescolati. Il rettore estrae a caso senza reinserimento gli 8 nomi. Qual è la probabilità che vengano estratti quattro studenti del terzo anno?

SOLUZIONI

Si tratta di uno schema Ipergeometrico con

$N=20$; $C=12$ (iscritti al III anno); $N-C=8$; $n=8$.

$$P(x=4) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{20}{4}} \binom{8}{4} = 0,00393$$

ESERCIZIO

Deve essere formata una delegazione di 3 laureati da inviare ad uno scambio di esperienze con i colleghi dell'Università di Varsavia. La nostra delegazione viene formata estraendo a caso senza reinserimento 3 nomi dall'elenco di tutti i laureati dell' 89-90 della seguente Tabella:

Tabella dei laureati nella Facoltà di Economia nell'A.A. 89-90, classificati secondo il punteggio e l'indirizzo seguito

Indirizzo	Voto di Laurea			
	≤95	96-105	106-110	Lode
Aziendale	2	8	4	1
Economico	1	4	1	0
Giuridico	4	7	2	1
Tradizionale	6	2	3	2

Calcolare la probabilità che ci siano:

- a) 2 dell'indirizzo Tradizionale;
- b) 1 dell'indirizzo Aziendale;
- c) almeno 1 dell'indirizzo Economico;
- d) tutti e 3 con un voto maggiore di 95.

SOLUZIONI

Le probabilità richieste si calcolano utilizzando la v.c. Ipergeometrica con $N=48$ (totale dei laureati, ottenuto come somma delle frequenze congiunte della tabella), $n=3$ e $x=0,1,2,3$; il valore di C varia a seconda della probabilità richiesta:

- a) $C=13$ tot. di laureati dell'indirizzo Tradizionale (è la frequenza marginale relativa alla modalità *tradizionale* del carattere per riga *indirizzo*). Quindi $N-C=35$.

$$P(x=2) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{48}{3}} \binom{35}{1} = 0,1578$$

- b) $C=15$ tot. di laureati dell'indirizzo Aziendale (è la frequenza marginale relativa alla modalità *aziendale* del carattere per riga *indirizzo*). Quindi $N-C=33$.

$$P(x=1) = \frac{\binom{15}{1}}{\binom{48}{3}} \binom{33}{2} = 0,45791$$

- c) $C=6$ tot. di laureati dell'indirizzo Economico (è la frequenza marginale relativa alla modalità *economico* del carattere per riga *indirizzo*). Quindi $N-C=42$.

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - \frac{\binom{6}{0}}{\binom{48}{3}} \binom{42}{3} = 1 - 0,6637 = 0,3363$$

- d) $C=35 = 48 - 13$ (dove 13 è il tot. dei laureati con voto ≤ 95 e si ottiene come frequenza marginale relativa alla modalità ≤ 95 del carattere per colonna *voto di laurea*). $N-C=48-35=13$.

$$P(x=3) = \frac{\binom{35}{3}}{\binom{48}{3}} \binom{13}{0} = 0,3784$$

V.C. DI POISSON o V.C. DEGLI EVENTI RARI

Dato un numero molto elevato di prove n , eseguite tutte nelle medesime condizioni, la **v.c. di POISSON** X descrive il numero di volte in cui accade un evento casuale E , di probabilità infinitesima nella singola prova ($: P(E)=p \rightarrow 0$), dove sia noto il numero medio di volte m in cui il medesimo evento casuale accade.

La **v.c. di Poisson** si può ricondurre ad una v.c. Binomiale nella quale resti costante il numero medio di volte ($M(x)=np$) in cui si verifica E nelle n prove e il numero n di prove tenda all'infinito ($n \rightarrow +\infty$); da cui segue che la probabilità di E nella singola prova deve essere infinitesima ($: P(E)=p \rightarrow 0$):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ np=m=k}} \underbrace{P(x)}_{v.c. Binomiale} = \underbrace{P(x)}_{v.c. Poisson}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

con funzione di probabilità associata:

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \quad (\text{con } m > 0)$$

Con $\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$ essendo X una v.c. discreta.

Media aritmetica: $E(x)=m$

Varianza: $V(x)=m$

Moda: $m-1 \leq \text{MODA}(x) \leq m$

La v.c. di Poisson dipende dal valore dell'unico parametro m .

Quando $m > 10$ allora la v.c. di Poisson converge alla v.c. Normale.

ESERCIZIO

Ogni ora, sulle strisce pedonali, passano in media 30 automobili.

- a) Qual è la probabilità che in un'ora nessuna automobile attraversi le strisce?
- b) Qual è la probabilità che in un'ora le strisce siano attraversate da 4 automobili al massimo?

SOLUZIONI

Il numero di automobili che attraversano le strisce pedonali è descritto da una v.c. di Poisson di media $M(x)=m=30$:

$$x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

con funzione di probabilità:

$$P(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$a) \quad P(x=0) = \frac{e^{-30} 30^0}{0!} = 0,0821$$

$$b) \quad P(x \leq 4) = \sum_{x=0}^4 P(x) = 0,891$$

ESERCIZIO

Il numero di chiamate telefoniche che arrivano in un'ora al centralino di un'azienda segue la distribuzione di Poisson con media $m=3$.

Descrivere tale v.c. calcolandone media, varianza e moda.

Calcolare la probabilità che durante un'ora

- a) Non ci siano chiamate;
- b) Ci sia almeno una chiamata;
- c) Arrivino al massimo 3 telefonate;

d) Arrivino non meno di 2 telefonate.

SOLUZIONI

Il numero di telefonate per ora è descritto dalla v.c. di Poisson X: $x = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Con $P(x) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}$

x	P(x)	x*P(x)	x ² *P(x)
0	0,0497871	0	0
1	0,1493612	0,1493612	0,1493612
2	0,2240418	0,4480836	0,8961672
3	0,2240418	0,6721254	2,0163762
4	0,1680314	0,6721256	2,6885024
5	0,1008188	0,5040940	2,5204700
6	0,0504094	0,3024564	1,8147384
7	0,0216040	0,1512280	1,0585960
>7	0,0119045	0,1005258	0,8557886
	1	3	12

$$E(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = 3 = m$$

$$V(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x) - (3)^2 = 12 - 9 = 3$$

$$m-1=2 \leq \text{MODA}(x) \leq m=3$$

Quindi tale v.c. di Poisson è bimodale: 2 e 3 (valori di X cui infatti corrisponde la massima probabilità 0,2240418).

a) $P(x=0)=0,0497871$

b) $P(x \geq 1) = \sum_{x=1}^{\infty} p(x) = 1 - P(x=0) = 1 - 0,0497871 = 0,9502129$

c) $P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 p(x) = 0,6472$

d) $P(x \geq 2) = \sum_{x=2}^{\infty} p(x) = 1 - [P(x=0) + P(x=1)] = 0,8008$

ESERCIZIO

Un negozio di vestiti vende un certo modello, in media, 2 volte la settimana.

Calcolare la probabilità che in una settimana:

- a) Non si venda nessun vestito;
- b) Si vendano più di 3 vestiti.

SOLUZIONI

Il numero di modelli venduti in una settimana è descritto da una v.c. di Poisson di media $m=2$:

$X=0, 1, 2, \dots, \infty$.

$$\text{a) } P(x=0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = 0,135$$

$$\text{b) } P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - \sum_{x=0}^3 p(x) = 0,142878$$