

# Foglio 4

24 ottobre 2013

**Esercizio 1** (Punti 6). Si consideri il seguente sottoinsieme di  $M_2(\mathbb{C})$ :

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C}, a - b = 0 \right\}$$

Verificare che  $W$  è un sottospazio di  $M_2(\mathbb{C})$  e trovarne una base.

**Esercizio 2** (Punti 6). Si consideri l'insieme di vettori in  $\mathbb{C}^4$

$$W = \{ [0 \ 1 \ 0 \ 1]^T, [-1 \ 4 \ 3 \ 2]^T, [-3 \ 7 \ 9 \ 1]^T, [-1 \ 2 \ 3 \ 0]^T \}$$

1. Dimostrare che è linearmente dipendente.
2. Estrarre da essi un insieme linearmente indipendente e completarlo ad una base di  $\mathbb{C}^4$ .

**Esercizio 3** (Punti 6). Verificare che il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ .  $v = [-3 \ -3 \ 2]^T$  sta in  $W$ ? E  $w = [-2 \ -2 \ 1]^T$ ? (Giustificare la risposta). Trovare una base di  $W$ .

**Esercizio 4** (Punti 8). Si considerino i sottoinsiemi  $U$  e  $V$  di  $\mathbb{R}^3$

$$U = \left\{ [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{ [x_1 \ x_2 \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

1. Verificare che sia  $U$  che  $V$  sono sottospazi di  $\mathbb{R}^3$ .
2. Determinarne la dimensione e una base di  $U$  e  $V$ .
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione  $U \cap V$ .

**Esercizio 5** (Punti 4). Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $\{u, v\}$  una base di  $V$ . Dimostrare che  $\{u, u + v\}$  è una base di  $V$ .