Calcolare, se $\exists$, $\int_0^1 (2x+2)\ln(x+2)\,dx$

Ris

$f(x)=(2x+2)\ln(x+2)$ è definita e continua in $(-2,+\infty)$ perché prodotto di composte di funzioni continue

f è continua in $[0,1] \Rightarrow \exists \int_0^1 f(x)\,dx$

$\int(2x+2)\ln(x+2)\,dx =$ per parti:

$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$ ove $f' = 2x+2$, $f = x^2+2x$, $g = \ln(x+2)$, $g' = \frac{1}{x+2}$

$$\int(2x+1)\ln(x+2)\,dx = (x^2+2x)\cdot\ln(x+2) - \int(x^2+2x)\cdot\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= (x^2+2x)\ln(x+2) - \int x\,\cancel{\frac{x+2}{x+2}}\,dx = (x^2+2x)\ln(x+2) - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[(x^2+2x)\ln(x+2) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(3\ln 3 - \frac{1}{2}\right) - 0 = 3\ln 3 - \frac{1}{2}$$

Condizioni sufficienti di integrabilità secondo Riemann

Hp. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

1) se f è monotona in $[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

2) se f è continua in $[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

3) se f è limitata in $[a,b]$ e se f è continua in $[a,b]\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$, con $x_i\in[a,b]$ $\forall i=1,\dots,n$ $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$.

EX3 fila A