Il grado di una applicazione propria $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

f propria: $f^{-1}(K) = H$
f continua e K compatto, H compatto

Osservazione $f(\mathbb{R}^n)$ è chiusa

Dim.

Infatti sia y punto di accumulazione di $f(\mathbb{R}^n)$. $\exists\ y_n = f(x_n)$ per qualche x_n tale che $y_n \to y$.

Sia $K = \{y_n\}_{n=1,2..} \cup \{y\}$. K è compatto.

$\Rightarrow$ $f^{-1}(K)$ è compatto (f è propria)

ora $f[f^{-1}(K)]$ è compatto e contiene $\{y_n\}$. Dunque contiene y.

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spera a.a. 2009/10

Lezione **XL**

Supponiamo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, propria.

È allora ben definito

$$\boxed{f^*: H^n_c(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^n_c(\mathbb{R}^n)}$$

coomologia a supporto compatto

Sia α $\mapsto$ generatore $[\alpha]$ di $H_c(\mathbb{R}^n)$

(α n-forma ammessa con $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = 1$)

$$\boxed{\deg f := \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f^*\alpha}_{} \quad \in \mathbb{R} \text{ (a priori)}}$$

grado di f

è a supporto compatto

Mostriamo che $\boxed{\deg f \in \mathbb{Z}}$

Definizione:

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad m \geq n$

$p \in \mathbb{R}^m$ è critico per f se

☆ $[f_*|_p$ non è suriettivo.

differenziale

f non sommersiva in p

($\Rightarrow$ non è in tal caso neanche iniettivo:)

$m = \dim \operatorname{Ker} f_*|_p + \dim \operatorname{Im} f_*|_p$

Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$n \leq m$
Criticità:
$f_*|_p$ non iniettivo
f non immersiva in p

$f(p) \equiv$ valore critico

$$\text{valori regolari} = \mathbb{R}^n - \{\underbrace{\text{valori critici}}_{}\} \qquad (\{\text{valori critici}\} \equiv C(f))$$

(f^{-1}(val. regolare) può risultare $= \emptyset$)

Teorema di Sard (v. Dubrovnik - Fomenko - Novikov .. Bredon .. Lee)

Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ liscia

$C(f)$ ha misura nulla

Teorema Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ propria e non suriettiva. Allora $\deg f = 0$.

Dim. Sia $p \notin f(\mathbb{R}^n)$. $\exists\ \mathcal{U} \ni p$ intorno aperto tale che $\mathcal{U} \cap f(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ [si ricordi che $f(\mathbb{R}^n)$ è chiuso]

Si scelga α n-forma chiusa con supporto in $\mathcal{U}$.

Allora $f^*\alpha = 0$ $\square$

Sia allora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ propria e suriettiva. Per ☆ Sard, quasi tutti i valori di f sono regolari. Se ne scelga uno, q . . . . .

☆ f_* è un isomorfismo (come già osservato)

$\Rightarrow$ localmente f è un diffeomorfismo (attorno ad ogni pto $p \in f^{-1}(q)$, che consta di un numero finito di punti (è un insieme discreto e compatto)
(f è propria)

[si ha un rivestimento locale]

Si scelga α con supporto localizzato in un intorno di q. Si ha

α

q

$$\underset{\deg f}{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f^* \alpha}} = \sum_{f^{-1}(q)} \pm 1$$

(un diff. ☆ conserva un integrale a meno del segno....)

È evidente allora l'asserto:

☆ $\deg f \in \mathbb{Z}$ (e non dipende dal valore regolare q)

↯ possiamo estendere deg f per.

$$\underline{f}: M \to N \qquad \dim M = \dim N = n$$

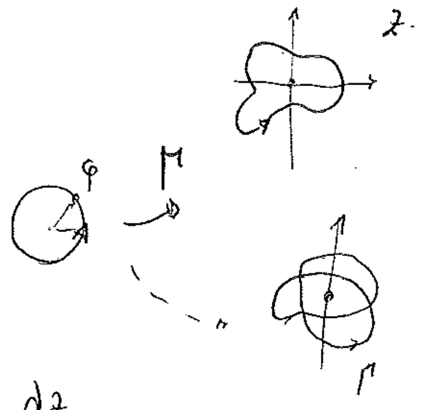
M, N <u>compatte</u> <u>orientate</u> f <u>liscia</u>

Sia ω generatore di $H^n(N)$ $(\neq 0\,!)$ $\quad \int_N \omega = 1$

$$\left[\ \deg f = \int_M f^* \omega\ \right]$$

↯ Sard vale <u>per le varietà</u>, e si ha la stessa interpretazione di $\deg f$

$$= \sum_{f^{-1}(q)} \pm 1 \qquad q \text{ } \underline{\text{valore regolare}}$$



Esempio importante: $f: S^1 \to S^1$ forma angolare

$$\deg f = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f^* d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \log z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z}$$

$f \sim (\varphi \mapsto e^{im\varphi}) \qquad m = \deg f$

Se vogliamo $f: S^1 \to S^1$ definiamo $f(\varphi) = \dfrac{\Gamma(\varphi)}{\|\Gamma(\varphi)\|}$

Applicazione del grado

Teorema di Gauss - Bonnet

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_g} K \, d\sigma = 2-2g = \chi(\Sigma_g) \right]$$

$\mathbb{R}^3$ curvatura gaussiana

Si definisce in modo "estrinseco" ma di fatto dipende solo dalla metrica su Σ_g "Theorema Egregium"

Dim.

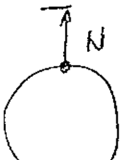
consideriamo

$$\underline{n} : \Sigma_g \to S^2 \qquad \text{mappa di Gauss}$$
$$x \mapsto \underline{n}_x$$

$$= \deg \underline{n} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_g} K \, d\sigma \in \mathbb{Z}$$

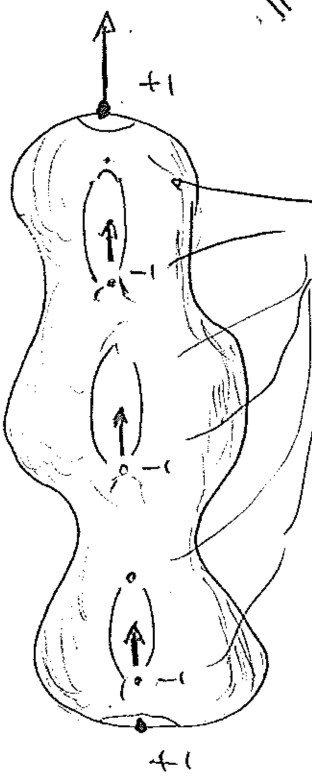
$$\| \qquad 4\pi \underbrace{\underline{n}^* w}_{\text{forma volume su } S^2} = n^* d\sigma$$

$\underline{n}^{-1}(N)$



$\|$

$1-g$ $\qquad \int_{S^2} w = 1$ normalizzata



↑ valore regolare non si perde in generalità) cf. Sard

(☆ pti critici di $z = z(P)$ $P \in \Sigma_g$

(cf. teoria di Morse !)

z ↑

[Si ricordi anche che in un pto critico

$\underset{-}{\times}$ $\quad \ominus^{+}$ $\quad \det \underset{\text{Hessiano}}{H} = K$]

Il linking number di Gauss (v. Arnold - Khesin)

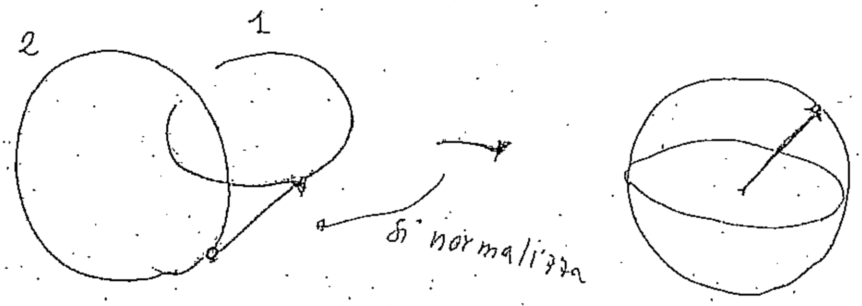
$$\gamma_i : \overset{t_i}{S^1_i} \to \mathbb{R}^3 \qquad t_i \in [0, T_i]$$

$$\dot\gamma_i = \dot\gamma_i(t_i)$$

$$S^1_1 \times S^1_2$$

$$f : \mathbb{T}^2 \to S^2$$

$$(t_1, t_2) \longmapsto \frac{\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)}{\|\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)\|}$$



*** cf. la def. di curvatura gaussiana
$\Sigma \ni p \overset{n}{\longmapsto} \vec{n}_p \in S^2$
$K = n^*\sigma$

$$\boxed{\ell k(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \frac{\langle \dot\gamma_1 \times \dot\gamma_2 , \gamma_1 - \gamma_2 \rangle}{\|\gamma_1 - \gamma_2\|^3} \, dt_1 dt_2}$$

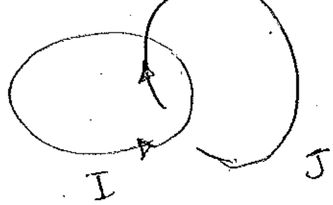
Gauss (1833)

$$f = \frac{F}{\|F\|} \quad ; F(t_1, t_2) = \gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)$$

V. anche oltre

(sfera: or. indotto dalla normale esterna ...)

definizione combinatoria del linking number



$\ell(I,J) :=$

Σ (I, J) $+1$ $+ \Sigma$ (I, J) -1

qui $\ell(I,J) = +1$

$\ell(I,J) = \ell(J,I)$

Calcoliamo il grado di $f: T^2 \to S^2$

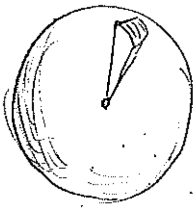
$$\deg f = \frac{1}{4\pi} \iint_{T^2} f^* \nu^2$$

el. d'area su S^2

$\langle \vec{n}, \cdot \times \cdot \rangle$

normale interna

in questo caso



$$f^*\nu^2(a_1, a_2) := \nu^2(f_* a_1, f_* a_2) =$$

vettori tangenti (su T^2)

$$= \langle f_* a_1 \times f_* a_2, -f \rangle$$

Differenziamo $f = \frac{F}{\|F\|}$

$$f_* a = \frac{F_*}{\|F\|} a + \underbrace{c(a, f) f}_{\text{sparisce nel } \times}$$

scalare

$$\Rightarrow \nu^2(f_* a_1, f_* a_2) = \frac{\langle F_* a_1, F_* a_2, -F \rangle}{\|F\|^2}$$

attenzione

$$\Rightarrow f^*\nu^2 = \frac{\langle \dot{\alpha}_1 \times \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2 \rangle}{\|\alpha_1 - \alpha_2\|^3} \, dt_1 \wedge dt_2$$

formula di Biot-Savart

grado di f = linking number
(def. algebricamente)

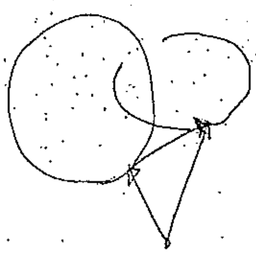
<u>Cenno di dim</u> (Arnold - Khesin)

Il teorema è vero per

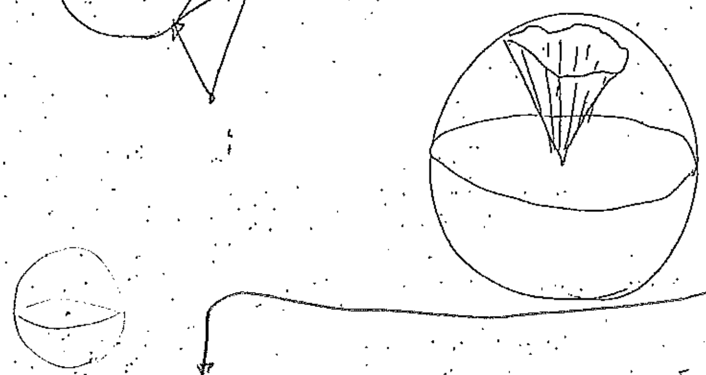
(grado e linking = 0 (f non è suriettiva..)

Se una curva passa dentro l'altra, essi variano per una stessa <u>quantità</u> (intero..)

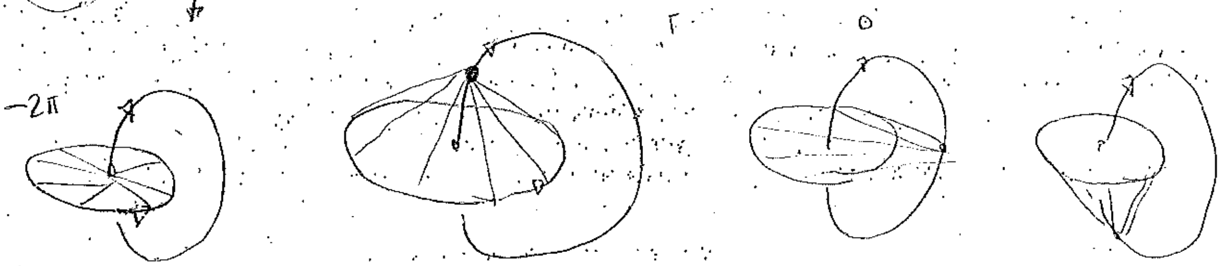
Poichè le mappe lisce $S^1 \to \mathbb{R}^3$ danno un insieme connesso, il risultato segue.



[Si utilizzano angoli solidi (orientati) descritti su S^2]



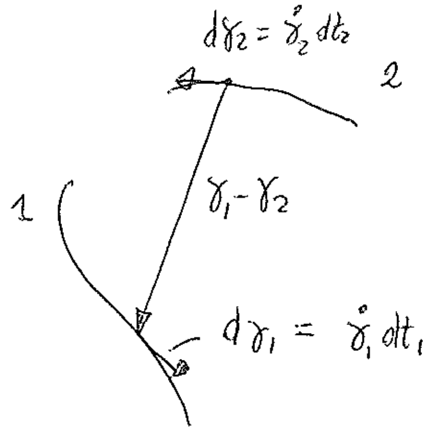
verifichiamo che in questo caso $lk = +1$

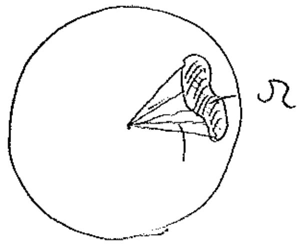


$= 2\pi$ mod 2π

variazione: $4\pi \Rightarrow lk = +1$

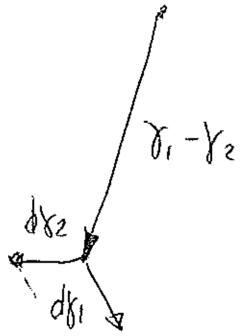
qualche dettaglio ulteriore



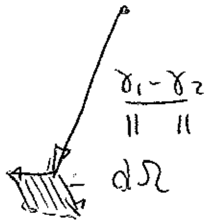


$A = R^2 \Omega$

$R = 1 \quad A = \Omega$



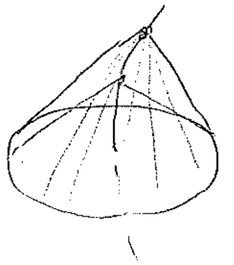
normalizzando: l'angolo solido si misura in steradianti (steradians)



$$lk = \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega$$ ← elemento di angolo solido

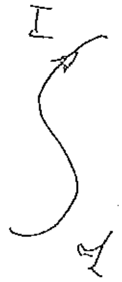
$$d\sigma = R^2 \underset{\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta}{\underbrace{d\Omega}}$$

$$= \frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \frac{\text{variazione totale dell'angolo solido ottenuto tenendo fissa una curva e facendo scorrere il vertice sull'altra}}{4\pi}$$



Derivazione alternativa

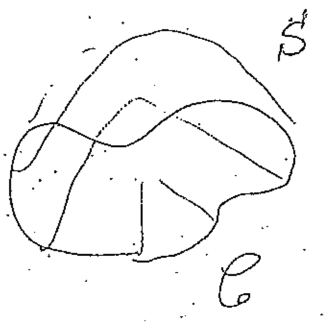
* Legge di Ampère [Presumibilmente l'argomento originale di C.F. Gauss (1833)]



$\underline{B}$ campo magnetico prodotto da I

$\operatorname{curl} \underline{B} = \mu_0 J$ $\qquad$ $\operatorname{div} \underline{B} = 0$

densità di corrente

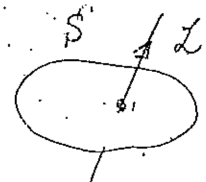


orientazione di $\underline{B}$ lungo C

$$\int_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \int_S \operatorname{curl} \underline{B} \cdot d\underline{\sigma} = \mu_0 \underbrace{\int_S \underline{J} \cdot d\underline{\sigma}}_{= I}$$

$= \mu_0 I$ ⚠ corrente totale che attraversa S

$= I$ se



L attraversa S una volta (con segno opportuno)

In generale $\displaystyle\int_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 n I \qquad n \in \mathbb{Z}$

legge di Ampère

Calcoliamo $\int_{C_1} \underline{B}\, d\underline{l}$ in un altro modo

Sia $\underline{B} = \text{curl}\, \underline{A}$ pot. vettore

"Coulomb gauge" $\text{div}\, \underline{A} = 0$

Laplaciano

$\Rightarrow \quad \Delta \underline{A} = -\mu_0 J$ (problema di Poisson)

$$A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\underline{r}' \frac{J(\underline{r}')}{\|\underline{r} - \underline{r}'\|}$$

Sia ora il filo C', $d\underline{l}'$ el. di linea

$J = \delta$ sul filo " $J(\underline{r}')\, d^3\underline{r}' = I\, d\underline{l}'$ "

$I \int \delta(\underline{r}' - \underline{r})\, d\underline{l}'$

$\Downarrow$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \text{curl} \int_{C'} \frac{d\underline{l}'}{\|\underline{r} - \underline{r}'\|}$$

$$= -\frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{(r - r') \times d\underline{l}'}{\|r - r'\|^3} \quad \text{Biot-Savart}$$

Calcoliamo la circuitazione:

prodotto misto

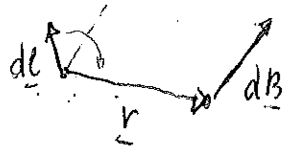
$$\int_{C_1} \underline{B}\, d\underline{\ell} = -\frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{C}\int_{C'} \frac{\langle \underline{r}-\underline{r}' \times d\underline{\ell}',\, d\underline{\ell}\rangle}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}$$

$$= \mu_0 I \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{C_1}\int_{C_1'} \frac{\langle \underline{r}-\underline{r}' \times d\underline{\ell},\, d\underline{\ell}'\rangle}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}}_{= m \text{ linking number di Gauss}}$$

per la legge di Ampère

Il caso nell'insieme : la legge di Biot-Savart

$$d\underline{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\underline{\ell} \times \underline{r}}{r^3}$$



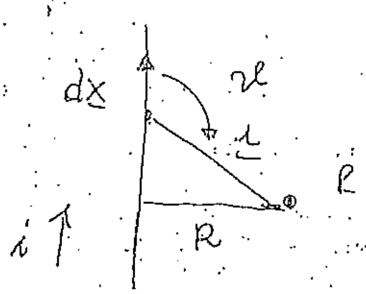
$$\underline{B} = \int d\underline{B}$$

da cui discende la legge di Ampère

Esempio

$\sim \frac{1}{r}$

v. un qualsiasi testo di Fisica



$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dx \sin\vartheta}{r^2}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\vartheta\, dx}{r^2}, \quad \text{ma}$$

$$r = \sqrt{x^2+R^2} \quad \text{e} \quad \sin\vartheta = \sin(\pi-\vartheta) = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R\,da}{(a^2+R^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ per sostituzione

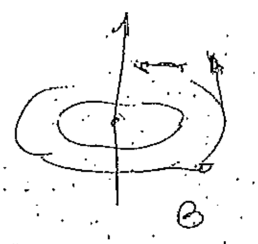
$a = R\,tg\,t$

$\frac{a}{R} = tg\,t$

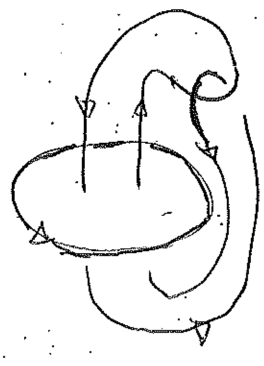
$t = \operatorname{arctg}\frac{a}{R}$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{R}$$

notare



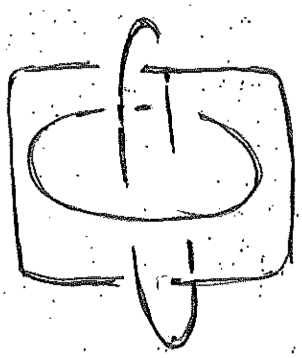
Attenzione ...



link di Whitehead

$lk = 0$

ma le due curve non si possono "separare"



anelli di Borromeo

$lk_{ij} = 0$ (a due a due)

ma non si possono "separare"

4 l'invariante di Hopf

$$f: S^3 \to S^2 \qquad \text{liscia}$$

Sia α generatore di $H^2_{DR}(S^2)$ (ex α : forma d'area normalizzata, $\int_{S^2} \alpha = 1$)

$$f^*\alpha \in H^2_{dR}(S^3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f^*\alpha = dv \qquad \in \Lambda^1(S^3)$$

Definiamo

$$\boxed{H(f) = \int_{S^3} v \wedge dv}$$

invariante di Hopf di f
dipende solo da $[f]$ classe di omotopia di f

Di fatto $H(f)$ non dipende da v ed è $\in \mathbb{Z}$

[*** in meccanica dei fluidi, questo è l'elicità, se v corrisponde al campo di velocità di un fluido perfetto $v \leftrightarrow \underline{v}$ $(\operatorname{div} \underline{v} = 0)$
$w = dv \leftrightarrow \underline{\omega}$ vorticità

f prende il nome di parametro d'ordine di Faddeev]

verifichiamo che $H(f)$ non dip. da v
Sia v' t.che $f^*\alpha = v'$

$$\int_{S^3} v' \wedge dv' - \int_{S^3} v \wedge dv = \int_{S^3} v' \wedge dv - \int_{S^3} v \wedge dv$$

$$= \int_{S^3} (v'-v) \wedge dv = \int_{S^3} d((v-v') \wedge v) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S^3} (\ ) = 0$$

$$d\left[(v'-v)\wedge v\right] = \underbrace{d(v'-v)}_{0} \wedge v - (v'-v)\wedge dv = (v-v')\wedge dv$$

Se $f_0 \sim f_1$ $\qquad f_i: S^3 \to S^2$

omotopia $\qquad F: S^3 \times I \to S^2$

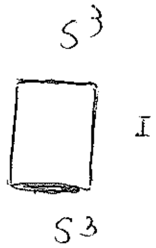
$$i_0: S^3 \to S^3 \times \{0\} \subset S^3 \times I$$
$$i_1: S^3 \to S^3 \times \{1\} \subset S^3 \times I$$

$$f_0 = F \circ i_0 \qquad f_1 = F \circ i_1$$

Sia $\quad v_i = f_i \circ v \qquad$ Si trova subito:

$$H(f_1) - H(f_0) = \int_{S^3} v_1 \wedge dv_1 - \int_{S^3} v_0 \wedge dv_0$$

$$= \int_{S^3} i_1^*(v \wedge dv) - \int_{S^3} i_0^*(v \wedge dv)$$



⚠ $$= \int_{\partial(S^3 \times I)} v \wedge dv \underset{(\text{Stokes})}{=} \int_{S^3 \times I} d(v \wedge dv)$$

$$= \int_{S^3 \times I} dv \wedge dv = \int_{S^3 \times I} F^*(\overset{\overset{0}{\parallel}}{\alpha \wedge \alpha}) = 0$$

poiché $\quad \alpha \wedge \alpha \equiv 0 \quad$ in S^2

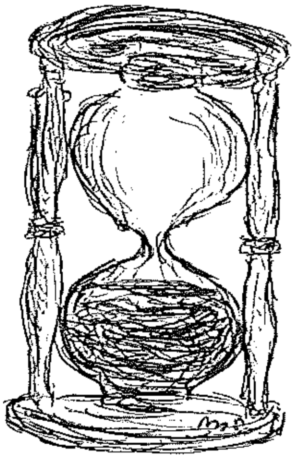
$$\Rightarrow \quad H(f_1) = H(f_0)$$

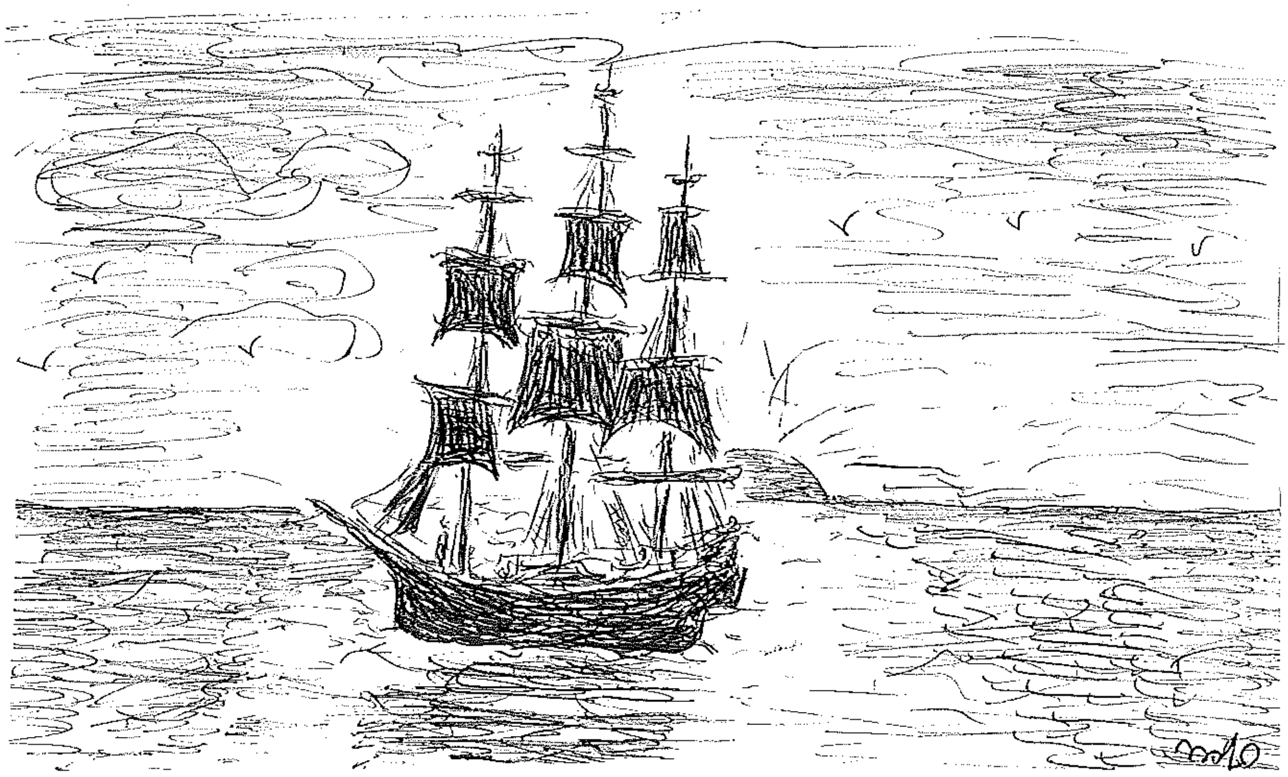
Calcolando $H(f)$ per la fibrazione di Hopf

$$f: \underset{S^3}{\underset{\cap}{(z_0, z_1)}} \longmapsto \underset{S^2}{\underset{\cap}{[z_0, z_1]}}$$

si trova $H(f) = 1$ (= lk di due fibre generiche)

Continuerebbe ... ma ci fermiamo qui





" O fim duma viagem é apenas o começo doutra.
É preciso ver o que não foi visto, ver outra vez o
necessario
que se viu já, ver na Primavera o que se vira no
vedere vedeva
Verão, ver de dia o que se viu de noite, com sol
estate
onde primeiramente a chuva caía, ver a seara verde,
pioggia raccolto, messe
o fruto maduro, a pedra que mudou de lugar, a
sombra che aquí não estava. É preciso voltar aos passos
ombra
que foram dados, para os repetir, e traçar caminhos
novos aos lados deles. É preciso recomeçar a viagem.
Sempre. O viajante volta já." [J. Saramago (Nobel 1998)
"Viagem a Portugal". Caminho]