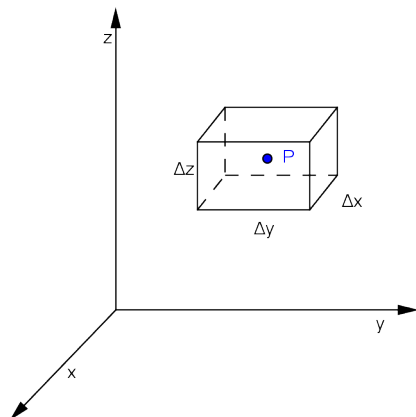


DIVERGENZA E TEOREMA DI GAUSS

Significato della divergenza

Sia dato un campo vettoriale $\mathbf{F} = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$, e consideriamo un punto $P = (x, y, z)$ al centro di un piccolo parallelepipedo con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani, e di lunghezza rispettivamente Δx , Δy e Δz , come in figura. Vogliamo



calcolare il flusso totale del campo $\mathbf{F}$, uscente dalle sei facce del parallelepipedo di volume ΔV .

Il nostro scopo è di mostrare che

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} (\text{flusso totale di } \mathbf{F}). \quad (1)$$

In una interpretazione idrodinamica, questa formula rappresenta la massa di fluido che emerge dal piccolo parallelepipedo che contiene P , nell'unità di tempo.

Cominciamo con il calcolo del flusso. Attraverso la faccia anteriore del parallelepipedo, che ha per normale il vettore $\mathbf{i}$, il flusso è approssimativamente $F_1(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$. Invece, attraverso la faccia posteriore, che ha per normale il vettore $-\mathbf{i}$, il flusso è

$$-F_1(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z) \Delta y \Delta z.$$

Attraverso le due facce si ottiene perciò un flusso pari a

$$[F_1(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z) - F_1(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z)] \Delta y \Delta z.$$

Analogamente, attraverso le facce perpendicolari al vettore $\mathbf{j}$ si ha il flusso

$$[F_2(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z) - F_2(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, z)] \Delta x \Delta z,$$

e attraverso le facce perpendicolari al vettore $\mathbf{k}$ si ha il flusso

$$[F_3(x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) - F_3(x, y, z - \frac{1}{2}\Delta z)] \Delta x \Delta y.$$

Dividendo ora le tre espressioni per $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, e semplificando, otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{F_1(x + \frac{1}{2}\Delta x, y, z) - F_1(x - \frac{1}{2}\Delta x, y, z)}{\Delta x} + \\ & + \frac{[F_2(x, y + \frac{1}{2}\Delta y, z) - F_2(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, z)]}{\Delta y} + \\ & + \frac{F_3(x, y, z + \frac{1}{2}\Delta z) - F_3(x, y, z - \frac{1}{2}\Delta z)}{\Delta z}. \end{aligned}$$

E infine, passando al limite per $\Delta V \rightarrow 0$, che comporta $\delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, arriviamo a

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

e quindi alla tesi.

Una conseguenza immediata del risultato precedente è che possiamo stimare il flusso uscente dalle facce di un piccolo parallelepipedo mediante la formula

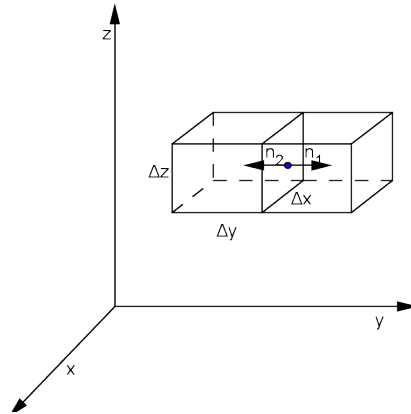
$$\text{flusso totale di } \mathbf{F} \approx (\nabla \cdot \mathbf{F}) \Delta V \quad (2)$$

Teorema 1 di Gauss o della divergenza

Il flusso di un campo vettoriale $\mathbf{F}$ che esce da una superficie S chiusa e liscia a tratti è uguale all'integrale della divergenza di $\mathbf{F}$ sulla regione R delimitata da S ; in simboli

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \int \int \int_R \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (3)$$

Dimostrazione (qualitativa.) Suddividiamo la regione R in molti piccoli parallelepipedi mediante piani paralleli agli assi coordinati, ignorando i parallelepipedi non contenuti completamente nella regione. Per (2), il flusso uscente da ognuno di questi vale *flusso di $\mathbf{F} \approx \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta V$.*



Consideriamo ora il flusso totale uscente da *due* parallelepipedi che hanno una faccia in comune, come in figura . Sulla faccia comune, il flusso uscente dal primo parallelepipedo è l'opposto del flusso uscente dal secondo parallelepipedo, in quanto i vettori normali alla faccia sono opposti: $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.

Pertanto, la somma dei flussi dei due parallelepipedi è pari al flusso attraverso *le sole facce esterne* del solido ottenuto dall'unione dei due parallelepipedi. Ciò naturalmente vale per un numero arbitrario di parallelepipedi. Possiamo perciò affermare che

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA \approx \sum (\nabla \cdot \mathbf{F}) \, \Delta V,$$

dove naturalmente la somma è estesa a tutti i parallelepipedi che compongono la regione R .

Il risultato si ottiene poi ricordando che l'integrale triplo della divergenza di $\mathbf{F}$ su R è l'estremo superiore della sommatoria, quando si considerano scomposizioni sempre più fini della regione R in parallelepipedi. CVD.