TUTORAGGIO ANALISI II
a.a. 2012/2013
dott.ssa Saoncella

LEZIONE DEL 7/11/2012

Segue ora una tabella riassuntiva riguardante l'argomento Equazioni differenziali.

VARIABILI SEPARABILI (I° ORDINE)	LINEARI (qualunque ordine)			
	COEFF. COSTANTI		COEFF. VARIABILI	
	OMOGENEE	NON OMOGENEE	OMOGENEE	NON OMOGENEE
• studio delle soluzioni costanti • integrale indefinito	• polinomio caratteristico. (base delle soluzioni)	• combinazione lineare della base dell'omogenea + soluzione particolare (metodo variazione costanti o metodo coefficienti indeterminati.)	/	• combinazione lineare della base dell'omogenea + soluzione particolare (metodo variazione costanti).

NOTA: il metodo dei coeff. indeterminati non si può usare sempre.

Esercizi di Riepilogo

1) Risolvere la seguente eq. diff. lineare non omogenea del 3° ordine

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = x^2 \qquad (*)$$

Iniziamo con il risolvere l'equazione omogenea associata

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

Abbiamo un polinomio di 3° grado da risolvere, pertanto dobbiamo cercare soluzioni intere tra i divisori interi di -6, ovvero $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Si trova che le radici sono

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3 \qquad \text{(radici semplici)}.$$

quindi $y_{omo} = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$. Ricerchiamo ora la soluzione particolare. Il termine noto di ⊛ è della forma x^2.
Applichiamo il metodo dei coeff. indeterminati.
Iniziamo con l'osservare che 0 non è soluzione del polinomio caratteristico. Quindi cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ che sia un polinomio di grado 2, quindi

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$$

Sostituendo in ⊛ si ottiene

$$\bar{y}'''(x) - 6\bar{y}''(x) + 11\bar{y}'(x) - 6y(x) = x^2$$

cioè

$$-12a + 11(2ax + b) - 6(ax^2 + bx + c) = x^2$$

da cui

$$-6ax^2 + (22a - 6b)x - 12a + 11b - 6c = x^2$$

quindi

$a = -1/6$

$b = \frac{22}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{11}{18}$

$c = -\frac{12}{6}\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{11}{6}\left(-\frac{11}{18}\right) = \frac{1}{3} - \frac{121}{108} = -\frac{85}{108}$

pertanto la soluzione particolare è

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{18}x - \frac{85}{108}$$

Concludendo abbiamo trovato che la soluzione di ⊛ è

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}\ \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{8}x - \frac{85}{108}$$

2) Risolvere la seguente eq. diff. lineare non omogenea del 4° ordine

$$y^{IV} - y'' = x - 1 \qquad (**)$$

L'equazione omogenea associata è $y^{IV} - y'' = 0$, il cui polinomio caratteristico è

$$\lambda^4 - \lambda^2 = 0$$

che ha come radici

$\lambda_1 = 0$ (molteplicità 2)

$\lambda_2 = 1$ (radice semplice)

$\lambda_3 = -1$ (" ")

pertanto abbiamo che la soluzione dell'omogenea è

$$y_{omo}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

Procediamo con la ricerca della soluzione particolare.
Osserviamo che il termine noto di $(**)$ è della forma $x-1$.
Inoltre abbiamo che 0 è soluzione del polinomio caratteristico di molteplicità 2, quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = x^2(ax+b) = ax^3 + bx^2$$

Sostituendo in $(**)$ si ottiene

$$\bar{y}^{IV}(x) - \bar{y}''(x) = x - 1$$

da cui

$$-(6ax + 2b) = x - 1$$

pertanto

$a = -1/6$

$b = 1/2$

quindi $\bar{y}(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

Infine la soluzione di $(**)$ è

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

3) Risolvere la seguente equazione lineare a coeff. costanti

$$y'' + y = \tan x \quad (***)$$

L'omogenea associata, che è $y''+y=0$, ha come polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha come radici $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. La soluzione dell'omogenea associata è

$$y_{OMO}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Ricerchiamo ora la soluzione particolare. Applichiamo il metodo della variazione delle costanti.
Cerchiamo quindi soluzioni del tipo

$$\bar{y}(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$$

Andiamo a sostituire $\bar{y}(x)$ in $(***)$, quindi dobbiamo calcolare

$$\bar{y}'(x) = c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x - c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$$

Imponiamo quindi $c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$

Si ha allora

$$\bar{y}'(x) = -c_1(x) \sin x + c_2(x) \cos x$$

Calcoliamo ora

$$\bar{y}''(x) = -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x - c_1(x) \cos x - c_2(x) \sin x$$

Sostituendo ciò che abbiamo trovato nell'equazione di partenza $(***)$ si ottiene:

$$-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x - \cancel{c_1(x) \cos x} - \cancel{c_2(x) \sin x} + \cancel{c_1(x) \cos x} + \cancel{c_2(x) \sin x} = \tan x$$

da cui si ricava che

$$-c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \tan x$$

A questo punto otteniamo il seguente sistema nelle incognite $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \tan x \end{cases}$$

che scritto in forma matriciale diventa

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan(x) \end{pmatrix}$$

La matrice inversa è

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Quindi otteniamo

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tan x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \tan x \\ \cos x \tan x \end{pmatrix}$$

A questo punto dobbiamo passare agli integrali per poter determinare $c_1(x)$ e $c_2(x)$. Quindi

$$c_1(x) = -\int \frac{\sin^2(x)}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = -\int \frac{1}{\cos x}\,dx + \sin x \overset{\text{usando le formule parametriche (1)}}{=}$$

$$= -\int \frac{2\,dt}{1-t^2} + \sin x = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt + \sin x =$$

$$= \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \sin x = \sin x - \log\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right|$$

(1) Le formule sono

$t = \tan(x/2)$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

mentre $c_2(x)$ è

$$c_2(x)=\int \cos x \tan x \, dx = -\cos x$$

Abbiamo così ottenuto che la soluzione particolare è

$$\bar{y}(x)=\cos x \sin x - \log\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right|\cos x - \cos x \sin x$$

Infine si ottiene che la soluzione generale di (***) è

$$y(x)=c_1\cos x + c_2 \sin x - \log\left|\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right|\cos(x).$$

4) Risolvere la seguente equazione lineare a coeff. costanti non omogenea:

$$y''+3y=x+2\cos x$$

Iniziamo con il risolvere l'omogenea associata

$$y''+3y=0$$

Il polinomio caratteristico è

$$\lambda^2+3=0$$

Le cui radici sono $\lambda_1=\sqrt{3}i$ e $\lambda_2=-\sqrt{3}i$.
Quindi la soluzione dell'omogenea è

$$y_{omo}(x)=c_1\cos(\sqrt{3}x)+c_2\sin(\sqrt{3}x)$$

Ricerchiamo ora la soluzione particolare.
Quest'ultima è data dalla somma delle soluzioni particolari delle seguenti due equazioni:

$$y''+3y=x \qquad (i)$$

e

$$y''+3y=2\cos x \qquad (ii)$$

Andiamo a risolvere la prima mediante il metodo dei coeff. indeterminati.
A secondo membro di (i) abbiamo un polinomio di 1° grado, inoltre 0 non è soluzione del polinomio caratteristico, pertanto la soluzione particolare di (i) sarà della forma

$$\bar{y}_1(x) = ax + b$$

Sostituendo quest'ultima in (i) otteniamo

$$3ax + 3b = x$$

da cui si ricava che

$$a = 1/3$$
$$b = 0$$

Pertanto abbiamo trovato che la soluzione particolare di (i) è

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{3}x$$

Procediamo ora con la ricerca della soluzione particolare della seconda equazione. Applichiamo ancora il metodo dei coeff. indetermin.
Quindi osservando che a secondo membro c'è una funzione trigonometrica dove il coefficiente della x, di cos x, moltiplicato per i (cioè i), non è soluzione del polinomio caratteristico.
Pertanto la soluzione particolare di (ii) sarà del tipo

$$\bar{y}_2(x) = A\cos x + B\sin x$$

che sostituita in (ii), si ottiene

$$-A\cos x - B\sin x + 3A\cos x + 3B\sin x = 2\cos x$$

quindi

$$2A\cos x + 2B\sin x = 2\cos x$$

da cui si ricava che

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

quindi $\bar{y}_2(x) = \cos x$.
In definitiva, la soluzione generale dell'equazione di partenza è

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{3}x) + c_2\sin(\sqrt{3}x) + \frac{1}{3}x + \cos x$$