Correzione dell'appello del giorno 8 febbraio 2011

Davide Boscaini

Questa è la risol della versione del compito scritto di Analisi Matematica 1 assegnata al *gruppo B* dell'appello del giorno 8 febbraio 2011. Invito chi trovasse alcuni errori a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1 (punti 5)**.** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k^2} + (-1)^k}{1 - k^3 + k^5},$$

motivando adeguatamente le risposte.

Soluzione. Per prima cosa notiamo il fatto che la serie assegnata si può scrivere a sua volta come somma di due diverse serie numeriche:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k^2} + (-1)^k}{1 - k^3 + k^5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k^2}}{1 - k^3 + k^5} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 - k^3 + k^5}.$$

Per facilitare la notazione nel seguito dello svolgimento dell'esercizio, scegliamo di indicare con a_k i termini generali della serie assegnata, con b_k quelli della seconda serie e con c_k quelli della terza, ed ultima, serie. Se in seguito quindi dovessimo riutilizzare l'equazione precedente, scriveremo $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$. Come si può facilmente notare $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ è una serie a termini positivi: il numeratore è un esponenziale, quindi per definizione sempre positivo, e, nonostante il fatto che nel polinomio al denominatore compaia un segno negativo, per ogni $k \geq 0$ esso è sempre positivo. Al contrario $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ è una serie a termini a segno alterno: si può facilmente rendersi conto di questo fatto osservando che al numeratore compare il termine $(-1)^k$, il quale, per valori pari di k è positivo, mentre per valori dispari di k è negativo.

Studieremo quindi il comportamento delle due serie in modo indipendente, ben consci del fatto che, se anche solo una di esse dovesse divergere, allora l'intera serie assegnata divergerà. Allo stesso modo per poter dire che $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, si deve avere che entrambe le serie che la costituiscono convergano.

- per quanto riguarda la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ scegliamo di usare il *metodo del confronto asintotico* con la serie "test"

  $$\sum_{k=0}^{+\infty} d_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k^2}}{k^5}.$$

  Si ha

  $$\lim_{k\to+\infty} \frac{b_k}{d_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-k^2}}{1 - k^3 + k^5} \frac{k^5}{e^{-k^2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^5}{k^5 - k^3 + 1} = 1.$$

Visto che il limite è diverso sia da 0 che da $+\infty$, per il metodo del confronto asintotico, il comportamento della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ è lo stesso del comportamento delle serie scelta per il confronto. Ora visto che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} d_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-k^2}}{k^5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{k^2} k^5} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^5} < +\infty \text{ (poiché } 5 > 1),$$

allora anche la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge semplicemente. Infine, trattandosi di una serie a termini positivi, essa coinciderà con la relativa serie dei valori assoluti, quindi la convergenza è anche assoluta.

- per quanto riguarda $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$, avendo a che fare con una serie a termini oscillanti, per studiarne la convergenza scegliamo di usare il *criterio di Leibniz.* Le cose da controllare per poterlo applicare sono due: se in valore assoluto i termini generali sono decrescenti, ovvero se $|c_{k+1}| < |c_k|$ e se, al crescere di k, essi tendono a zero, cioè se $\lim_{k\to+\infty}|c_k| = 0$. La prima richiesta è soddisfatta, infatti

$$\begin{aligned}
|c_{k+1}| &= \frac{1}{1-(k+1)^3+(k+1)^5} = \frac{1}{1-(k+1)^3+(k+1)^3(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{1-(k^3+3k^2+3k+1)+(k^3+3k^2+3k+1)(k^2+2k+1)} \\
&= \frac{1}{k^5+8k^4+6k^3+7k^2+2k+1} \\
&= \frac{1}{(k^5-k^3+1)+8k^4+7k^3+7k^2+2k} \\
&< \frac{1}{k^5-k^3+1} = |c_k|.
\end{aligned}$$

E così anche per la seconda, infatti

$$\lim_{k\to+\infty}|c_k| = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^5-k^3+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^5}\frac{1}{1-1/k^2+1/k^5} = 0.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ converge semplicemente. Se vogliamo capire se la convergenza è anche assoluta, basta controllare il comportamento delle serie dei valori assoluti

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|c_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^5-k^3+1}.$$

È facile vedere che quest'ultima serie converge per confronto asintotico con la serie convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} 1/k^5$.

In conclusione la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è assolutamente convergente.

Esercizio 2 (punti 7)**.** Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x-1}-\cos x}{\sin^2 x}.$$

Soluzione. Per prima cosa notiamo che il limite assegnato è una forma indeterminata del tipo 0/0, infatti

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} e^{\cos x - 1} = e^{\lim_{x\to 0}(\cos x - 1)} = e^{(1-1)} = e^0 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \sin^2 x = 0.$$

Possiamo quindi applicare la *regola di de l'Hopital*, secondo la quale

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x-1} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x-1}(-\sin x) - (-\sin x)}{2\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\cos x-1}}{2\cos x} = 0.$$

Esercizio 3 (punti 8)**.** Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} + \ln(x+1)}{x+1}\, dx.$$

Soluzione. Per prima cosa notiamo che, per la proprietà di linearità dell'integrale, possiamo scrivere

$$I := \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + \ln(x+1)}{x+1}\, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx + \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\, dx.$$

Occupiamoci ora, singolarmente, dei due termini:

- posto $x = t^2$, si ha $dx = 2tdt$, e quindi
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx &= \int_0^1 \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}\, dt - 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt = 2\int_0^1 dt - 2\arctan t\Big|_0^1 \\ &= 2t\Big|_0^1 - 2\arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

- posto $t = \ln(x+1)$, si ha $dt = \frac{1}{x+1}\, dx$, e quindi
$$\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1}\, dx = \int_0^{\ln 2} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2}.$$

In definitiva

$$I = 2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}.$$

Esercizio 4 (punti 10)**.** Studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right).$$

Soluzione. 1. DOMINIO: il logaritmo è ben definito se il suo argomento è strettamente positivo, cioè se

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} > 0.$$

Ora, il numeratore è positivo se $x^2 - 2 > 0$, ovvero se $x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$, mentre il denominatore è positivo se $x < -1$ o $x > 1$. Riportando tali informazioni sulla "tabella dei + e −" si trova che il dominio è formato dagli intervalli:

$$x < -\sqrt{2} \cup -1 < x < 1 \cup x > \sqrt{2}.$$

2. Intersezione con gli assi cartesiani: per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle ordinate si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right), \end{cases}$$

la cui soluzione è $y = \ln 2$. Quindi la funzione assegnata passa per il punto $A = (0, \ln 2)$. Invece per l'intersezione con l'asse delle ascisse si ha

$$\begin{cases} y = 0, \\ y = \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right), \end{cases}$$

cioè $0 = \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right)$. Elevando ambo i membri per la funzione esponenziale si ottiene $\frac{x^2-2}{x^2-1} = 1$, cioè la soluzione del sistema si riduce all'equazione

$$-\frac{1}{x^2-1} = 0,$$

che non ha soluzione. Quindi la funzione assegnata non "attraversa" mai l'asse delle ascisse.

3. Segno: come è noto $\ln y > 0$ se $y > 1$.Nel nostro caso allora $f(x) > 0$ se $\frac{x^2-2}{x^2-1} > 1$, cioè se

$$-\frac{1}{x^2-1} > 0.$$

Ora, il numeratore è sempre negativo, mentre il denominatore è positivo per $|x| > 1$, di conseguenza, riportando le informazioni ottenute sulla "tabella dei + e −", si trova che la funzione è positiva per $-1 < x < 1$, negativa altrove.

4. Parità/disparità: osservando che

$$f(-x) = \ln\left(\frac{(-x)^2-2}{(-x)^2-1}\right) = \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = f(x),$$

si può concludere che la funzione è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. Proprio per questo motivo possiamo limitarci a studiare la funzione assegnata solo per $x > 0$, l'andamento della funzione per le ascisse negative si otterrà poi con una semplice simmetria assiale.

5. Limiti/asintoti: tenendo conto che possiamo limitarci a studiare la funzione per $x > 0$, gli unici punti interessanti per cui vale la pena studiare il limite sono $x = 1$ e $x = \sqrt{2}$, oltre allo studio del comportamento asintotico (per $x = +\infty$). Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{-1}{0^-}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{1}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2-2}{x^2-1}\right) = \ln 1 = 0.$$

Di conseguenza deduciamo che $x = 1$ e $x = \sqrt{2}$ sono asintoti verticali, mentre $y = 0$ è asintoto orizzontale unilatero. Per simmetria anche $x = -1$ e $x = -\sqrt{2}$ sono asintoti verticali e $y = 0$ è asintoto orizzontale bilatero.

6. Derivata prima: applicando la regola della catena si ha

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2-2}{x^2-1}} \frac{2x(x^2-1)-(x^2-2)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3+4x}{(x^2-1)(x^2-2)} = \frac{2x}{(x^2-1)(x^2-2)}.$$

7. Crescenza/decrescenza: cerchiamo i punti del dominio per cui $f'(x) > 0$. Per quanto riguarda il numeratore, si ha semplicemente $x > 0$. Per il denominatore, invece, la cosa è leggermente più lunga: $(x^2-1)(x^2-2) = x^4-3x^2+2$ e, detto $t = x^2$, la condizione da verificare diventa $t^2-3t+2 > 0$. Ora la soluzione della disequazione è $t < 1$ o $t > 2$, che, riscritta in termini di x diventa $x < -\sqrt{2} \cup -1 < x < 1 \cup x > \sqrt{2}$. Inserendo ancora una volta le informazioni ottenute nella "tabella dei + e −" si trova che la funzione è crescente per $-\sqrt{2} < x < 1 \cup 0 < x < 1 \cup x > \sqrt{2}$, decrescente altrove.

8. Punti stazionari: si vede facilmente che $f'(x) = 0$ per $x = 0$. Dalla discussione precedente si ha che in un intorno negativo dell'origine la funzione è decrescente, mentre in un intorno positivo dell'origine la funzione è crescente. Questo ci porta a concludere, senza tanti calcoli problemi, che in corrispondenza di $x = 0$ c'è un punto di minimo relativo. Dal punto 2. sappiamo che nell'origine f passa per il punto $A = (0, \ln 2)$, che quindi è il punto di minimo relativo cercato. Non ci sono altri punti stazionari.

9. Derivata seconda: applicando ancora una volta la regola della catena e quella di Leibniz per la derivata di un prodotto, si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2-1)(x^2-2) - 2x(2x(x^2-2)+(x^2-1)2x)}{(x^2-1)^2(x^2-2)^2} \\ &= \frac{2x^4-6x^2+4-8x^4+8x^2+4x^2}{(x^2-1)^2(x^2-2)^2} \\ &= \frac{-6x^4+6x^2+4}{(x^2-1)^2(x^2-2)^2}. \end{aligned}$$

10. Convessità/concavità: ci chiediamo per quali x appartenenti al dominio di f si ha $f''(x) > 0$. Dal momento che il denominatore è sempre positivo, la nostra ricerca si limita alla condizione $-6x^4+6x^2+4 = -x^4+x^2+2/3 > 0$. Detto ora $t = x^2$, si ha $-t^2+t+2/3 > 0$, la cui soluzione è

$$t < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{11}{12}} =: t_1 \cup t > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{11}{12}} =: t_2,$$

che equivale a $x^2 > t_1 \cup x^2 < t_2$. Ci si accorge subito che t_1 è negativo, quindi ($\sqrt{11/12} \approxeq 1$), quindi possiamo limitarci a verificare quando la condizione $x^2 < t_2$ è verificata. In questo modo troviamo che $f''(x) > 0$ per

$$-\sqrt{2} < -\sqrt{\frac{3}{2}} < -\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{11}{12}}} = -\sqrt{t_2} < x < \sqrt{t_2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{11}{12}}} < \sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{2},$$

dove possiamo "allargarci" fino al valore noto $\sqrt{2}$ poiché la funzione assegnata non esiste per $1 < |x| < \sqrt{2}$. In definitiva la funzione è convessa per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, concava altrove.

11. Punti di flesso: il numeratore della derivata seconda si annulla per $x = \sqrt{t_1}$ e per $x = -\sqrt{t_1}$, quindi questi sono i punti di flesso. Dal momento che tali valori cadono fuori del dominio di esistenza della funzione non ha senso chiedersi se i flessi sono a tangente verticale, orizzontale o obliqua.

12. Grafico: riunendo tutte le informazioni ottenute nel corso dell'esercizio si arriva a tracciare il seguente grafico:

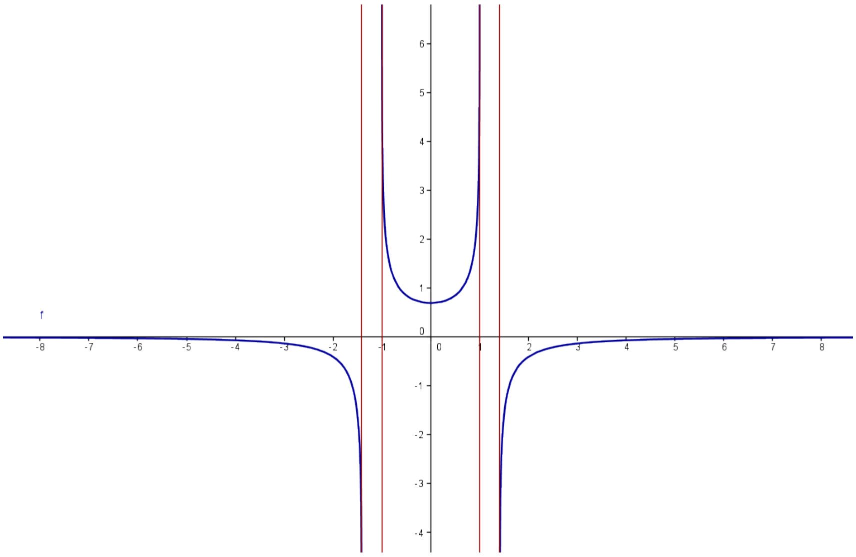

Figura 1: Andamento della funzione assegnata.