Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 1
3 ottobre 2012

1. Si dica quali dei seguenti insiemi dotati di operazione è un gruppo. In caso negativo si dica quali degli assiomi di gruppo non sono verificati

   (a) $G =$insieme dei numeri razionali con denominatore pari, $a \cdot b = a + b$, (l'usuale somma tra razionali)

   (b) $G =$ insieme delle matrici simmetriche $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$, $A \cdot B = AB$ (l'usuale prodotto righe per colonne).

   (c) Sia X un insieme e sia $G =$ insieme delle parti di X. Per ogni $Y, Z \in G$ sia $Y \cdot Z = (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z)$

   (d) Sia X un insieme e sia $G =$ insieme delle parti di X. Per ogni $Y, Z \in G$ sia $Y \cdot Z = Y \cup Z$

(4 punti)

2. Sia $\pi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, l'applicazione definita da $\pi_{a,b}(x) = ax+b$. Sia $G = \{\pi_{a,b} | a \neq 0\}$.

   (a) Si dimostri che G è un gruppo rispetto alla composizione e si determini l'espressione di $\pi_{a,b}\pi_{c,d}$.

   (b) Sia $N = \{\pi_{a,b} | a = 1\}$. Si verifichi che N è un sottogruppo normale di G.

(4 punti)

3. Sia $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a = \pm 1,\ b \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Si verifichi che G con la moltiplicazione righe per colonne è un gruppo non abeliano

   (b) Sia $N = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\ b \in \mathbb{Z}\}$. Si dimostri che N è un sottogruppo normale di G.

   (c) Si dimostri che N è il gruppo ciclico infinito generato da $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) Si dia esplicitamente un isomorfismo tra N e $\mathbb{Z}$

(6 punti)

4. (a) Si dimostri che la funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ definisce un omomorfismo di gruppi $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ e si deduca che $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$ dove $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

   (b) Si dimostri che le soluzioni complesse dell'equazione $x^n = 1$ formano un sottogruppo di $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorfo a $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

(6 punti)

5. Sia $f : M \to N$ un omomorfismo di gruppi suriettivo. Si dimostri che:

   (a) se H è un sottogruppo di N, allora $f^{\leftarrow}(H) = \{x \in M |\ f(x) \in H\}$ è un sottogruppo di M contenente $\mathrm{Ker} f$ e $f(f^{\leftarrow}(H)) = H$.

   (b) se L è un sottogruppo di M e $\mathrm{Ker} f \leq L$, allora $f(L)$ è un sottogruppo di N e $f^{\leftarrow}(f(L)) = L$.

   (c) si concluda che esiste una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di M contenenti il nucleo di f e i sottogruppi di N.

(6 punti)

6. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

   (a) Si verifichi la seguente formula per l'ordine di un elemento $\overline{a} \in G$:

   $$\mathrm{ord}(\overline{a}) = \frac{n}{MCD(a,n)}$$

   dove $MCD(a,n)$ indica il massimo comun divisore fra a e n.

   (b) Si determinino tutti i sottogruppi del gruppo G con il loro ordine e il loro indice in G (Suggerimento: si usi la corrispondenza tra sottogruppi dell'esercizio precedente).

(4 punti)

7. Sia G un gruppo finito di ordine *non* divisibile per 3 e sia $(ab)^3 = a^3b^3$ per ogni $a, b \in G$. Si dimostri che G è abeliano.

(**)

Gli esercizi $(**)$ sono da considerarsi difficili, ma particolarmente stimolanti. Il loro svolgimento comporta ulteriori punti al foglio di esercizi

Consegna: mercoledì 10 ottobre, durante la lezione.