Esercizio 1.1 L'ampiezza di un intervallo di confidenza è funzione della numerosità campionaria n e del livello di confidenza. A parità di tutto il resto, l'ampiezza diminuisce al crescere di n e aumenta al crescere di $1?\alpha$. Quindi, se da $0,95$ si passa a $0,99$ l'ampiezza aumenta, ma per compensare questo aumento possiamo far crescere n.

L'intervallo di confidenza per μ è

$$\left[\bar{X} - 1,96\sqrt{\frac{\sigma^2}{100}}; \bar{X} + 1,96\sqrt{\frac{\sigma^2}{100}}\right]$$

$$\left[\bar{X} - 2,576\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \bar{X} + 2,576\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

con ampiezza di

$$A_1 = 2 \cdot 1,96\frac{\sigma}{10}$$

$$A_2 = 2 \cdot 2,576\frac{\sigma}{n}$$

dunque, basta porre $A_1 = A_2$ e ricavare $n = 173$.

Se, invece, si dimezza la varianza e rimane fisso il livello di confidenza, allora avremo

$$2 \cdot 1,96\frac{\sigma}{10} = 2 \cdot 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$$

con $n = 50$.

Esercizio 1.2 Avremo $X \sim \mathcal{N}(\mu, 25)$ quindi l'intervallo di confidenza è

$$\left[15 - 1,96\sqrt{\frac{5}{120}}; 15 + 1,96\sqrt{\frac{5}{120}}\right] = [14,6; 15,4]$$

Per quanto riguarda la porzione di non pendolari, si applica il Teorema del Limite Centrale ed avremo

$$\left[0,6 - 2,576\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{120}}; 0,6 - 2,576\sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{120}}\right] = [0,485; 0,715]$$

Il test di iptesi è

$$\begin{cases} H_0 : & \pi = 0,55 \\ H_0 : & \pi > 0,55 \end{cases}$$

La statistica test è $T = \frac{0,6-0,55}{\sqrt{\frac{0,55(1-0,55)}{120}}} = 1,101$ ed il valore soglia è $z_{0,98} = 2,06$. Poichè $T < z_{0,98}$, non rifiutiamo l'ipotesi nulla.

Esercizio 1.4 Per come sono definite, le v.a. X_i sono bernoulliane (i.d.) di parametro θ e della teoria si ha $E[X_i] = \theta$ e $Var(X_i) = \theta(1-\theta)$.

Inoltre, le estrazioni avvengono con rimessa, il che implica che le v.a. X_i risultano essere indipendenti.

Uno stimatore T risulta essere corretto (o non distorto) se $E[T] = \theta$. Dunque:

$$\begin{aligned} E[T_1] &= E\left[\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right] = \frac{1}{3}E[X_1] + \frac{2}{3}E[X_2] = \frac{1}{3}\theta + \frac{2}{3}\theta = \theta \\ E[T_2] &= E\left[\frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2\right] = \frac{3}{4}E[X_1] + \frac{1}{4}E[X_2] = \frac{3}{4}\theta + \frac{1}{4}\theta = \theta \\ E[T_3] &= E\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{2}E[X_1] + \frac{1}{2}E[X_2] = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta = \theta \end{aligned}$$

Quindi i tre stimatori sono tutti corretti.

Per quel che riguarda l'efficienza, occorre determinare lo stimatore con varianza minima:

$$\begin{aligned} Var(T_1) &= Var\left[\frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2\right] = \frac{1}{9}Var[X_1] + \frac{4}{9}Var[X_2] \\ &= \frac{1}{9}\theta(1-\theta) + \frac{4}{9}\theta(1-\theta) = \frac{5}{9}\theta(1-\theta) \\ Var(T_2) &= Var\left[\frac{3}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2\right] = \frac{9}{16}Var[X_1] + \frac{1}{16}Var[X_2] \\ &= \frac{9}{16}\theta(1-\theta) + \frac{1}{16}\theta(1-\theta) = \frac{5}{8}\theta(1-\theta) \\ Var(T_3) &= Var\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}Var[X_1] + \frac{1}{4}Var[X_2] \\ &= \frac{1}{4}\theta(1-\theta) + \frac{1}{4}\theta(1-\theta) = \frac{1}{2}\theta(1-\theta) \end{aligned}$$

Dunque, lo stimatore piú efficiente é T_3.

ES. 1 (Verosimiglianza) (ES 1.3)

$$f(x,\theta) = \begin{cases} 5^{-\theta}\,\theta\, x^{\theta-1} , & 0 < x < 5 \\ 0 , & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$L = \prod f(x,\theta) = \left(5^{-\theta}\theta x_1^{\theta-1}\right)\cdots\left(5^{-\theta}\theta x_n^{\theta-1}\right)$$

$$= 5^{-n\theta}\,\theta^{n}\, x_1^{\theta-1}\cdots x_n^{\theta-1} = 5^{-n\theta}\,\theta^{n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta-1}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = -5\theta \ln(5) + n\ln(\theta) + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\ln(L)\right) = -5\ln(5) + \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\ln(L)\right) = 0 \Rightarrow -5\ln 5 + \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta} = 5\ln 5 - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n}{5\ln 5 - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}$$

Inoltre:

$$\frac{d^2 \ln(L)}{d\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$$

EX. 1.5

$$T = X_1^2 - X_1X_2X_3 \quad X_i \text{ iid}, \ \mu = E(X_i), \ \sigma^2 = Var(X_i)$$

$$E[T] = E[X_1^2 - X_1X_2X_3] \underset{\text{indip}}{=} E[X_1^2] - E[X_1]E[X_2]E[X_3]$$

$$= Var(X_1) - E(X_1)^2 - E(X_1)\,E(X_2)\,E(X_3)$$

$$= \sigma^2 - \mu^2 - \mu^3 \neq \sigma^2$$

$\Rightarrow$ [illegible]

$$\Rightarrow b(T) = E[T] - Var(T) = \sigma^2 - \mu^2 - \mu^3 - \sigma^2 = -\mu^2(1+\mu)$$

$$\cancel{= \mu^2(\mu \sigma \sigma)}$$

EX. 1.6

$$T = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + a X_3$$

$$E(T) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{4}E(X_2) + a\,E(X_3) \overset{\text{unbiased}}{=} \mu$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4}\mu + a\mu = \mu \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + a = 1$$

$$\Rightarrow a = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{4-2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Var(T) = Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3\right) = \frac{6}{16}\sigma^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 6 = 4$$

(ES. 1.7)

$\boxed{\cancel{EX. 4}}$ Il campione casuale è $\{X_1, \dots, X_{225}\}$, con X_i v.a. i.i.d.

1) Una stima puntuale per la porzione di pubblico è

$$\hat{p} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{90}{225} = 0,4$$

Tale stimatore risulta essere corretto, consistente ed efficiente (PERCHÈ?)

2) $\begin{cases} H_0: p = 0,3 \\ H_1: p > 0,3 \end{cases}$ con $1-\alpha = 0,95$

Si considera la statistica test $\dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0,4-0,3}{\sqrt{\dfrac{0,3(1-0,3)}{225}}} = 3,27$

In questo caso, $RC = \{z \in \mathbb{R} : z > z_{1-\alpha}\}$ (per il Teorema del limite centrale

dove $z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,645$

$\Rightarrow RC = \{z > 1,645\}$ e $3,27 \in RC$

$\Rightarrow$ Rifiuto H_0.

3) $IC = \left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} ; \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$,

dove $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

$\Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\Rightarrow IC = \left[0,4 - 1,96 \sqrt{\dfrac{0,4(1-0,4)}{225}} ; 0,4 + 1.96 \sqrt{\dfrac{0,4(1-0,4)}{225}}\right]$

$= [0,336 ; 0,464]$.

Università della Basilicata DIPARTIMENTO MATEMATICA, INFORMATICA ED ECONOMIA

(ES. 1.8)

~~5)~~ $\{X_1, \ldots, X_n\}$ c.c. di v.a. Gaussiane

$\Rightarrow X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \ \forall i = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$L(x; \mu; \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$= (2\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \ln\left[(2\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}}\right]$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-$$

$$\frac{d\ln(L)}{d\mu} = + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{n\mu}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \frac{n\mu}{\cancel{\sigma^2}} = \frac{1}{\cancel{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$ (i.e., la media campionaria).

2) $X \sim Po(\lambda)$.

- $E(X) < \infty$, infatti:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |k| e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$\Rightarrow$ per il criterio del rapporto, si ha:

$$\frac{\cancel{e^{-\lambda}} \lambda^{k+1}}{(k)!} \cdot \frac{(k-1)!}{\cancel{e^{-\lambda}} \lambda^k} = \frac{\lambda}{k} \xrightarrow{(k \to \infty)} 0$$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{-\lambda} \lambda^{k-1+1}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \underbrace{\sum_{J=0}^{+\infty} \frac{\lambda^J}{J!}}_{\text{sviluppo in serie di exp}} = \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \lambda.$$

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} k[(k-1)+1] \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1) \lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2+2}}{(k-2)!} + E(X)$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{J=0}^{+\infty} \frac{\lambda^J}{J!}}_{\text{sviluppo in serie di exp}} + E(X) = \lambda^2 \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} + \lambda$$

$\hookrightarrow k-2 =: J \Rightarrow k = J+2$ $\Rightarrow Var(X) = \cancel{\lambda^2} + \lambda - \cancel{\lambda^2} = \lambda$ ■

5) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(6)

- $\Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ è la v.a. standardizzata

$$\Rightarrow E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\sigma z+\mu) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma\, dz$$

$\hookrightarrow \dfrac{x-\mu}{\sigma} = z \Rightarrow x = \sigma z + \mu \Rightarrow dx = \sigma\, dz$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -z\, e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mu \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{=1} = 0 + \mu = \mu.$$

$= 1$ (x def. di densità normale standard)

- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z+\mu)^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz$$

$\hookrightarrow \dfrac{x-\mu}{\sigma} = z \Rightarrow x = \sigma z + \mu \Rightarrow dx = \sigma\, dz$

$$= \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sigma^2 z^2 + \mu^2 + 2\sigma z\right) e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2/2}\, dz + \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}\, dz + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} z\, e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 .$$

Osserviamo che:

$$I_3 = \frac{-2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -z\, e^{-z^2/2}\, dz = -\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 .$$

$$I_2 = \mu^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/2}\, dz = \mu^2$$ (x def. di densità gaussiana standard)

$$I_1 = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 2y\, e^{-y} \frac{(2y)^{-\frac{1}{2}}}{2}\, dy$$

$\hookrightarrow y := \frac{z^2}{2} \Rightarrow z = \sqrt{2y} \Rightarrow dz = \frac{1}{2\sqrt{2y}}\, dy$

$$\boxed{\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y} (2y)^{\frac{1}{2}}\, dy}_{=\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \sigma^2$$

$$\cancel{\Rightarrow E(X^2) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\pi} + \mu^2 =}$$

$$\cancel{\Rightarrow Var(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2}$$

$$I_1 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2/2} dz = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} z \left[-z e^{-z^2/2} \right] dz$$

Int. per parti:

$$\begin{cases} f(z) = z \Rightarrow f'(z) = 1 \\ g'(z) = -z e^{-z^2/2} \Rightarrow g(z) = e^{-z^2/2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{z e^{-z^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \right]$$

$$= \sigma^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz}_{=1} = \sigma^2$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\Rightarrow Var(X) = \sigma^2 + \cancel{\mu^2} - \cancel{\mu^2} = \sigma^2.$$