PROBLEMA n. 3: Due corpi puntiformi aventi massa M = 2.4 kg e m = 1.2 kg, rispettivamente, sono fissati alle estremità opposte di un'asta rigida di massa trascurabile e di lunghezza L = 0.9 m. Inizialmente il sistema dei due corpi è posto in quiete su piano xy orizzontale, perfettamente liscio, con la massa M posta nell'origine O, mentre l'asta forma con l'asse di riferimento x un angolo di 60°. All'istante t = 0 viene applicato al corpo di massa m un impulso istantaneo di intensità $J_0 = 5.4$ kg m s^{-1} in direzione parallela all'asse y e verso concorde, e il sistema si mette istantaneamente in moto roto-traslatorio nel piano xy. Calcolare:

a) le componenti cartesiane dell'impulso istantaneo $\mathbf{J}_0$;
b) le componenti cartesiane del vettore posizione iniziale $\mathbf{r}_{CM}$ del centro di massa del sistema.

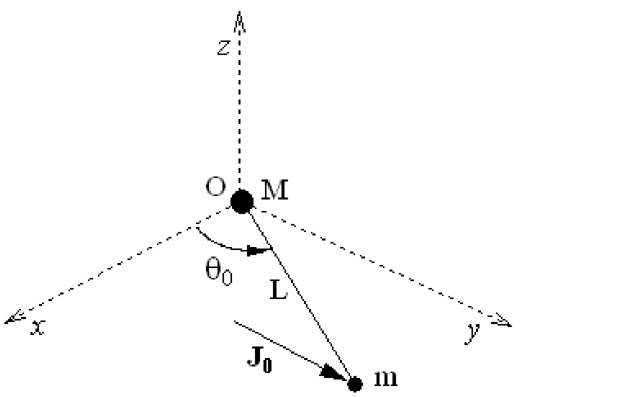
Con riferimento al moto roto-traslazionale dopo l'applicazione dell'impulso determinare:

c) la velocità $\mathbf{v}_{CM}(t)$ del centro di massa del sistema;
d) la legge oraria $\mathbf{r}_{CM}(t)$ del moto del centro di massa del sistema;
e) il momento della quantità di moto del centro di massa $\mathbf{L}_{CM}(t)$ rispetto al polo O;
f) il momento della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{L}_O(t)$ rispetto al polo O;
g) il momento della quantità di moto intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$;
h) la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di rotazione del sistema;
i) l'energia cinetica interna E_k^{INT} ;
j) la tensione $\mathbf{T}$ dell'asta.

SOLUZIONE

Dati del problema:
M= 2.4 kg, m = 1.2 kg, L = 0.9 m, $J_0 = 5.4$ kg m s^{-1}, $\theta_0 = \pi/3$ (= 60°)

Si sceglie il sistema di riferimento fisso indicato in figura, in cui l'asse y è parallelo all'impulso $\mathbf{J}_0$.



Prima dell'impulso il sistema è in quiete e quindi sia la risultante delle forze esterne che il momento delle forze esterne rispetto all'origine O del sistema sono nulli.

a) le componenti cartesiane dell'impulso istantaneo $\mathbf{J}_0$ sono:

$$J_{0x} = 0,\ J_{0y} = 5.4 \text{ kg m s}^{-1},\ J_{0z} = 0$$

b) le componenti cartesiane del vettore posizione iniziale $\mathbf{r}_{CM,0}$ del centro di massa del sistema sono:

$$x_{CM,0} = mL/\,(M+m)\cos\theta_0 = 0.15 \text{ m}$$
$$y_{CM,0} = mL/\,(M+m)\sin\theta_0 = 0.26 \text{ m}$$

L'applicazione dell'impulso comunica:
1 - quantità di moto al CM del sistema:
2 - momento angolare rispetto al CM, ma anche rispetto a un punto fisso O:

c) la velocità $\mathbf{v}_{CM}$ del centro di massa del sistema:
In base al teorema dell'impulso (vedi punto 1) $\mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{P}_S$ e quindi si avrà che

$(M+m)\,(\mathbf{v}_{CM} - \mathbf{v}_{CM,0}) = \mathbf{J}_0$, dove $\mathbf{v}_{CM,0} = 0$ dato che *la velocità iniziale del sistema è nulla*

$$\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{J}_0/(m+M)$$

Poichè l'impulso nel sistema di riferimento scelto ha solo componente orizzontale y anche la velocità del CM avrà solo componente orizzontale y che indichiamo con $v_{CM,y}$:

$$\mathbf{v}_{CM} = 1.5\ \mathrm{ms}^{-1}\ \mathbf{j}$$

d) la legge oraria $\mathbf{r}_{CM}$ (t) del moto del centro di massa del sistema;
Integrando la velocità in funzione del tempo si ottiene la legge oraria (per la posizione del CM a t = 0 vedi $\mathbf{r}_{CM,0}$ sopra):

$$\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{CM,0} + [\mathbf{J}_0/(M + m)]\ t$$

che corrisponde a un moto rettilineo uniforme parallelo all'asse y ad una distanza $x_{CM} = 0\ .15$ m dall'asse stesso. La equazioni parametriche del moto del CM sono:

$$x_{CM} = 0.15 \qquad (\mathrm{m})$$
$$y_{CM} = 0.26 + 1.5\ t \qquad (\mathrm{m})$$

e) il momento della quantità di moto del centro di massa $\mathbf{L}_{CM}(t)$ rispetto al polo O;
Il centro di massa del sistema si muove come un punto materiale libero per cui:

$$\mathbf{L}_{O,CM}(t) = \mathbf{r}_{CM} \wedge (M+m)\ \mathbf{v}_{CM} = 0.81\ \mathrm{kg\ m^2\ s^{-1}}\ \mathbf{k}$$

f) il momento della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{L}_O(t)$ rispetto al polo O:
In base al teorema del momento dell'impulso rispetto al punto fisso O (vedi punto 2) $\mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{L}_{O,S}$ dove $\mathbf{r}_m$ è il vettore posizione iniziale della massa m rispetto al punto O
Ora $\Delta\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,S}(t) - \mathbf{L}_{O,S,0}$, dove $\mathbf{L}_{O,S,0} = 0$ dato che *la sistema è inizialmente in quiete.*

E quindi si avrà che $\mathbf{L}_{O,S}(t) = \mathbf{L}_{0,S}(0)$, cioè:

$$\mathbf{r}_m \wedge \mathbf{J}_0 = L\ J_0 \cos\theta_0\ \mathbf{k} = 2.43\ \mathrm{kg\ m^2 s^{-1}}\ \mathbf{k}$$

g) il momento della quantità di moto intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$
Dal teorema di Konig per il momento angolare si ottiene immediatamente:

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT}(t) = \mathbf{L}_{O,S}(t) - \mathbf{L}_{O,CM}(t) = 1.62\ \mathrm{kgm^2 s^{-1}}\ \mathbf{k}$$

In alternativa, Osservando che il momento angolare rispetto al CM, prima dell'impulso era nullo, dal punto 2 si potrà scrivere che l'impulso comunica al sistema un momento angolare rispetto al CM:

$$\mathbf{L}_{CM}(0_+) = \mathbf{r}_m' \wedge \mathbf{J}_0$$

dove $\mathbf{r}_m'$ è il vettore posizione iniziale della massa m rispetto al centro di massa del sistema e $\mathbf{L}_{CM}(0_+)$ è momento angolare rispetto al CM subito dopo l'applicazione dell'impulso.

Dopo alcuni calcoli si ha: $\mathbf{L}_{CM}(0_+) = ML/(M+m)\, J_0\, \mathbf{k} = 1.62\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}\ \mathbf{k}$

h) la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ di rotazione del sistema:
Il momento angolare totale rispetto al CM subito dopo l'impulso (t = 0) vale:

$$\mathbf{L}_{CM}(t) = I_{CM,z}\, \omega(t)\, \mathbf{k}$$

dove $I_{CM,z}$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione z passante per il centro di massa e vale:

$$I_{CM,z} = M[mL/(M+m)]^2 + m[ML/(M+m)]^2$$

$$I_{CM,z} = [mM/(M+m)]L^2 = 0.648\ \text{kg m}^2$$

Sostituendo, si ottiene la velocità angolare del sistema $\omega(t)\,\mathbf{k}$:

$$\omega(t) = J_0\cos\theta/Lm = 2.5\ \text{rad s}^{-1}\ \text{k}$$

i) l'energia cinetica interna E_k^{INT}:
L'energia cinetica interna è la somma delle energie cinetiche dei due corpi calcolate nel sistema del centro di massa:

$$E_k^{INT} = ½\, m\, [(ML\omega/(M+m)]^2 + ½\, M\, [(mL\omega/(M+m)]^2 = ½\, \mu\, L^2\omega^2 = 2.025\ \text{J}$$

dove $\mu = mM/(m+M)$

Alternativamente, ricordando che il moto del sistema rispetto al CM è puramente rotazionale, l'energia cinetica di rotazione del manubrio rigido si può scrivere come:

$$Ek^{INT} = ½\, I_{CM,z}\, \omega^2 = 2.025\ \text{J}$$

dove $I_{CM,z} = [mM/(M+m)]L^2$.

j) la tensione **T** dell'asta.
Il sistema, dopo l'applicazione dell'impulso, trasla lungo y ruotando attorno al suo centro di massa con velocità angolare $\omega = 2.5\ \text{rad s}^{-1}$, per cui la tensione dell'asta è data dalla forza centripeta F_N a cui sono soggette le due masse M e m:

$$T = F_{N,M} = F_{N,m} = [mML/(M+m)]\, \omega^2 = 4.5\ \text{N}$$