Diario del corso di Analisi Matematica 3

G. Orlandi

a.a. 2011-12

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 4/10/11 (2 ore). Introduzione al corso. Richiami sui numeri complessi: parte reale, parte immaginaria, somma, prodotto, coniugio, prodotto scalare, modulo, argomento, argomento principale, rappresentazione cartesiana $z \equiv a + ib$, $i^2 = -1$, matriciale $z \equiv aI + bJ$, $J^2 = -I$ mediante le trasformazioni lineari conformi del piano che preservano l'orientazione, rappresentazione polare $z = |z|e^{i \arg(z)}$. Radici e formula di De Moivre. Funzioni complesse $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: si adottano le notazioni rettangolare $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u, v : A \to \mathbb{R}$. In virtù della relazione $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, si pone anche $f(x + iy) = f(z, \bar{z}) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ (rappresentazione con le variabili coniugate). Limiti e continuità per funzioni complesse. Funzioni elementari: la funzione $f(z) = z^2$.

Lezione dell'11/10/11 (2 ore). Limiti e continuità per funzioni complesse. Differenziabilità, matrice Jacobiana, invertibilità locale. Derivabilità in senso complesso, funzioni olomorfe. Regole di derivazione, derivabilità delle funzioni elementari. Anello delle funzioni olomorfe. Matrice Jacobiana di funzioni olomorfe, equazioni di Cauchy-Riemann. Rispetto alle variabili coniugate $z, \bar{z}$ le equazioni di Cauchy-Riemann si scrivono $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (dove si è posto $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$), ossia una funzione olomorfa si deve poter esprimere esplicitamente in funzione della sola z.

Interpretazione geometrica delle equazioni di Cauchy-Riemann: se $f = u+iv$ allora C-R implica $|\nabla u| = |\nabla v|$ e $\nabla v \perp \nabla u$ (ossia gli insiemi di livello di u sono ortogonali a quelli di v), e la matrice jacobiana $Df = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial v}{\partial x} J$ è una trasformazione conforme (nella rappresentazione matriciale dei numeri complessi, si ha $Df \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'$, per cui detto $\theta = \arg f'$, Df risulta essere la composizione di una rotazione antioraria di angolo θ e di una dilatazione di ampiezza $|f'|$), che preserva l'orientazione su $\mathbb{R}^2$ (ossia $\det Df = |f'| \geq 0$). Inoltre, il rango di Df è 2 (e in tal caso f è localmente invertibile) oppure 0.

Lezione del 13/10/11 (2 ore). Funzioni elementari: polinomi, funzioni razionali. Serie di potenze complesse, cerchio di convergenza. Funzioni analitiche complesse. Le funzioni analitiche sono olomorfe. Esponenziale complesso e^z. Funzioni trigonometriche complesse $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Il logaritmo complesso $\log z = \log|z| + i\arg(z)$. Logaritmo principale.

Lezione del 18/10/11 (2 ore). La funzione $z^c = e^{c\log z}$. Il problema di trovare un dominio di definizione "naturale" per le funzioni inverse delle funzioni elementari: superfici di Riemann a più fogli. Superficie di Riemann della radice k-esima e del logaritmo. Funzioni armoniche. Se $f = u + iv$ è olomorfa allora u e v sono funzioni armoniche, ossia vale $\mathrm{tr}D^2u \equiv \Delta u = \Delta v = 0$, dove $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ è l'operatore di Laplace o Laplaciano. In particolare v è detta l'armonica coniugata di u. Determinazione dell'armonica coniugata di una funzione armonica data. Soluzione fondamentale del Laplaciano in due dimensioni.

Lezione del 20/10/11 (2 ore). Costruzione di varietà topologiche, differenziali, analitiche. Superfici di Riemann come caso particolare di varietà analitiche complesse. Sfera di Riemann. Identificazione della sfera di Riemann con la compattificazione $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e con lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^1$, definito in coordinate omogenee da $\mathbb{CP}^1 = \{[z,w],\ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$, dove $[z,w] = [\lambda\cdot z, \lambda\cdot w]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Le carte coordinate $z \mapsto [z,1]$ e $w \mapsto [1,w]$, con la trasformazione di coordinate $w = z^{-1}$, costituiscono un atlante di $\mathbb{CP}^1$. Classificazione delle superfici di Riemann compatte.

Integrali di cammino per funzioni complesse. Data $f : A \subset \mathbb{C} \to C$ continua e $\Gamma \subset A$ una curva di classe C^1 a tratti (o più in generale, una curva continua *rettificabile*, ovvero di lunghezza finita) parametrizzata da $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$, si definisce

$$\int_\Gamma f(z)dz := \lim_{|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{N} f(z_k)\cdot \Delta z_k\,,$$

dove $\cdot$ è il prodotto complesso, $z_0, ..., z_N$ individuano una partizione di Γ e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Nelle ipotesi di cui sopra il limite delle somme di Riemann esiste e quindi l'integrale è ben definito. Vale inoltre $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)dt$.

Proprietà: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione), linearità rispetto ad f, additività rispetto alla curva. Se $z = x+iy$ ed $f = u+iv$, si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma udy + vdx$. Definiamo il campo di vettori $\vec{E} = (u, -v)$. Detto τ il versore tangente a Γ e ν il versore normale (rotazione antioraria di τ), si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma < \vec{E}, \tau > ds\ - i\int_\Gamma < \vec{E}, \nu > ds$. Per gli integrali di cammino vale la maggiorazione

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \le \sup_A |f| \int_a^b |\dot\gamma(t)|dt = ||f||_{L^\infty(A)}|\Gamma|,$$

dove $|\Gamma|$ indica la lunghezza della curva Γ.

Curve semplici, chiuse, curve di Jordan. Teorema delle curve di Jordan: detta $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva continua, semplice, chiusa, esistono $A, B \subset \mathbb{R}^2$ aperti, tali che $\Gamma = \partial A = \partial B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \cup \Gamma = \mathbb{R}^2$.

Teorema fondamentale del calcolo per integrali di cammino: se $f = g'$, allora $\int_\Gamma f(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$. In particolare, $\oint_\Gamma g'(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa Γ.

Proposizione: f olomorfa $\Rightarrow$ la forma differenziale complessa $f(z)dz$ è chiusa. Infatti, se f è olomorfa, che $f(z)dz = udx - vdy + i(udy + vdx)$ sia chiusa segue dalle equazioni di Cauchy-Riemann. Nelle variabili coniugate $z, \bar{z}$ si ha in particolare $d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$.

Teorema di Cauchy-Goursat: $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow$ per ogni curva di Jordan $\Gamma = \partial D$ di classe C^1 a tratti (o più in generale, rettificabile), con $D \subset A$ si ha $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$. Dimostrazione nel caso f di classe C^1: per il Teorema di Stokes per forme (alias Teorema di Gauss-Green nel piano), $\oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$ poichè $f(z)dz$ è chiusa.

Lezione del 25/10/11 (2 ore). Lemma di Goursat in un triangolo, estensione al caso di una poligonale semplice chiusa ed infine al caso di curve C^1 a tratti (o rettificabili) semplici chiuse. Estensione al caso di contorni di domini non semplicemente connessi, il cui bordo sia costituito da più curve semplici chiuse disgiunte. Integrale di $(z-a)^{-1}$ lungo una circonferenza di centro $a \in \mathbb{C}$. Formula integrale di Cauchy e conseguenze: analiticità delle funzioni olomorfe.

Lezione del 27/10/11 (2 ore). Conseguenze della formula integrale di Cauchy. Le derivate delle funzioni olomorfe sono olomorfe. Il limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo. Formula integrale e stime di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa. Proprietà della media $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$, teorema del massimo modulo: se $|f(z)| = \sup_B f$ con z interno a B aperto connesso, con $\bar{B}$ contenuto nel dominio di f, allora f è costante nella componente connessa del dominio contenente B: altrimenti detto, $\sup_B |f| = \sup_{\partial B} |f|$ per f olomorfa. Teorema di Liouville, teorema fondamentale dell'algebra.

Lezione del 3/11/11 (2 ore). Teorema di Morera. Teorema degli zeri delle funzioni olomorfe. Ordine di uno zero. Principio di continuazione analitica. Classificazione delle singolarità isolate di una funzione olomorfa: singolarità eliminabili, singolarità essenziali, poli. Ordine di un polo.

Lezione dell'8/11/11 (2 ore). Esempi di funzioni con singolarità eliminabili, poli, singolarità essenziali. Sviluppi in serie di Laurent, unicità dello sviluppo. Residuo. Formula dei residui.

Lezione del 10/11/11 (2 ore). Calcolo dei residui nel caso di singolarità essenziali. Alcuni metodi di calcolo dei residui per singolarità di tipo polo. Residuo all'infinito. Teorema globale dei residui. Lemma dell'arco di cerchio grande.

Lezione del 15/11/11 (2 ore). Calcolo di integrali impropri su $\mathbb{R}$. Lemma di Jordan e applicazioni al calcolo di trasformate di Fourier.

Lezione del 17/11/11 (2 ore). Integrali nel senso del valor principale. Lemma del cerchio piccolo per funzioni con poli semplici reali. Integrali di funzioni razionali di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ su $[0, 2\pi]$. Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} x^{-p} f(x)\, dx$ con $0 < p < 1$ (singolarità in un punto di ramificazione).

Lezione del 22/11/11 (2 ore). Calcolo di integrali del tipo $\int_0^{+\infty} f(x) \log x\, dx$. Calcolo della trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$. Calcolo di antitrasformate di Laplace. Funzioni con infinite singolarità isolate e applicazioni al calcolo della somma di serie numeriche.

Lezione del 24/11/11 (2 ore). Principio dell'argomento, significato geometrico. Applicazioni: teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Rouché, determinazione del numero di radici di un polinomio in una data regione.

Lezione del 29/11/11 (1 ora). Indice di avvolgimento. Formula integrale di Cauchy e teorema dei residui per circuitazioni lungo curve chiuse (non necessariamente di Jordan). Esercizi sul principio dell'argomento.

Lezione del 1/12/11 (2 ore). Trasformazioni conformi nel piano. Relazione con le equazioni di Cauchy-Riemann e le funzioni olomorfe. Proprietà: conservazione delle frontiere. Il Teorema di Riemann di classificazione conforme degli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ (o della sfera di Riemann). Condizioni per l'unicità di una trasformazione conforme tra due aperti semplicemente connessi conformemente equivalenti al disco unitario: condizione dei tre punti di frontiera, condizione sul punto interno e sull'argomento della derivata in quel punto.

Lezione del 7/12/11 (2 ore). Trasformazioni di Möbius, identificazione con $GL_2(\mathbb{C})$. Proprietà: trasformazione di circonferenze in circonferenze, trasformazione di coppie di punti inversi rispetto ad una circonferenza in coppie di punti inversi rispetto alla circonferenza immagine. Esempi: trasformazioni del disco unitario in sè, trasformazione del disco unitario in un semipiano.

Trasformazione di Schwarz-Christoffel (trasforma un semipiano in un poligono): dati $a_1 < a_2 < ... < a_n \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha_1, ..., \alpha_n < 1$ con $\sum_i \alpha_i = n - 2$, si pone

$$f(z) = c_1 + c_2 \int_{\Gamma_{0,z}} (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (\xi - a_n)^{\alpha_n - 1} d\xi \,,$$

dove per $\Gamma_{0,z}$ si può scegliere ad esempio il segmento di estremi 0 e z. La trasformazione è conforme tranne nei punti a_i, dove la derivata si annulla. Dato che per $|\xi| \to +\infty$ l'integranda è maggiorata da $C|\xi|^{-2}$, si ha $|f(\infty)| < +\infty$, e in particolare l'immmagine dell'asse reale è un insieme limitato. Inoltre, dall'espressione per $\log(f'(z))$ si ricava $\arg f'(z) = \arg c_2 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) \cdot \arg(z - a_i)$. In particolare, dato che $\arg(x - a_i) = \pi$ se $x < a_i$ e $\arg(x - a_i) = 0$ se $x > a_i$, si ottiene, per $z = x \in \mathbb{R}$, $a_k < x < a_{k+1}$, $\arg f'(x) = \arg c_2 + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - 1)\pi$. In particolare, per $a_k \le x \le a_{k+1}$, dato che $f(x) - f(a_k) = \int_{a_k}^x f'(\xi) d\xi$, si ottiene $\arg(f(x) - f(a_k)) = \arg c_2 + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - 1)\pi$

per ogni $a_k < x \leq a_{k+1}$, ovvero l'immagine dell'intervallo $[a_k, a_{k+1}]$ è il segmento di estremi $f(a_k)$ e $f(a_{k+1})$. L'angolo formato dai segmenti concorrenti in $f(a_k)$ è dato dalla differenza $\arg(f(a_{k-1}) - f(a_k)) - \arg(f(a_{k+1}) - f(a_k))$, ossia da $\pi + \arg(f(a_k) - f(a_{k-1})) - \arg(f(a_{k+1}) - f(a_k)) = \pi + (\alpha_k - 1)\pi = \alpha_k \pi$. Dato che la somma degli angoli vale $(n-2)\pi$ si deduce che l'immagine del semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ è un poligono chiuso convesso di vertici $f(a_i)$, per $i = 1, ..., n$.

Trasformazione di Joukowski (si applica in aerodinamica): si pone $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. La derivata $f'(z)$ si annulla in $z = \pm 1$ (zeri semplici), inoltre $f(z) = f(z^{-1})$ e vale

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta,$$

ovvero l'immagine di una circonferenza di centro l'origine è un'ellisse di fuochi ± 1 (degenere nel caso $r = 1$). Si osservi che ogni circonferenza passante per ± 1 è invariante rispetto alla trasformazione $z \mapsto z^{-1}$: se $z = x + iy$ e $z^{-1} = u + iv$ si ha $u = x/(x^2 + y^2)$ e $v = -y/(x^2 + y^2)$, e da $u^2 + v^2 - av - 1 = 0$ si ricava $x^2 + y^2 - ay - 1 = 0$. In particolare, l'immagine di ogni tale circonferenza C secondo la trasformazione di Joukowski è un arco di circonferenza (percorso in entrambi i versi) di estremi ± 1. Per continuità, l'immagine di una circonferenza di raggio di poco maggiore a quello di C, che sia tangente a C in $z = 1$ e che contenga al suo interno il punto $z = -1$ avrà il profilo di una sezione alare contenente al suo interno l'arco f(C), che ne individua così la curvatura, ed avente una cuspide in $z = 1$.

Lezione del 13/12/11 (2 ore). Il problema di Dirichlet in domini semplicemente connessi del piano. Problema di Neumann. Problemi ben posti. Proprietà della media, principio del massimo e conseguenze: unicità e stabilità (dipendenza continua) rispetto ai dati al contorno. Invarianza conforme dell'operatore di Laplace. Identità di Green e unicità per il problema di Neumann.

Lezione del 15/12/11 (2 ore). Metodi di risoluzione del problema di Dirichlet / Neumann: via separazione di variabili (in domini rettangolari rispetto a determinati sistemi di coordinate); determinando la funzione di Green del dominio dato; via Teorema della mappa di Riemann in domini semplicemente connessi el piano, riconducendosi al problema di Dirichlet nel cerchio; in generale, via metodi variazionali (minimizzazione di energie / distanze in opportuni spazi di Hilbert); rappresentazione della soluzione come limite di passeggiate casuali / moti browniani.

Il problema di Dirichlet nel cerchio: risoluzione mediante separazione di variabili. La serie risultante converge nell'interno del cerchio unitario ad una soluzione sotto condizioni miti sul dato al bordo g (ad esempio, $\int_0^{2\pi} |g(\theta)| \, d\theta < +\infty$), in virtù dell'effetto regolarizzante dell'operatore di Laplace. La soluzione all'interno del cerchio converge uniformemente al dato al bordo quando quest'ultimo è una funzione continua con derivata a quadrato sommabile, altrimenti la convergenza è assicurata solo nei punti di continuità di g, e ad esempio nei punti di salto si ha convergenza alla media dei limiti destro e sinistro di g nel punto di salto.

Lezione del 20/12/11 (2 ore). Rappresentazione integrale della soluzione u del Pb. di Dirichlet nel cerchio, con dato al bordo $g(ae^{i\phi}) \equiv g(\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, via nucleo di Poisson per il cerchio: se il raggio del cerchio è a, si ha, per $r < a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} g(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta, \phi) g(\phi)\, d\phi\,.$$

Alcune proprietà del nucleo di Poisson $P(r, \theta, \phi)$: si tratta di una funzione simmetrica rispetto a θ e ϕ, armonica rispetto alle coordinate (r, θ) (ovvero (r, ϕ)), che tende uniformemente a zero per $r \to a$ con $|\theta - \phi| > \delta$, mentre $P(r, \phi, \phi) \to +\infty$ per $r \to a$. Inoltre, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta, \phi)\, d\phi = 1$ per ogni $r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Da queste proprietà discende ad esempio che se $ae^{i\theta_0}$ è un punto di continuità di g, e $re^{i\theta} \to ae^{i\theta_0}$, allora $u(re^{i\theta}) \to g(\theta_0)$, ovvero si ha la convergenza di u al dato al bordo nei punti di continuità di quest'ultimo (vedasi Weinberger, p. 106).

Interpretazione fisica del nucleo di Poisson: fissato ϕ, $P(r, \theta, \phi)$ corrisponde al potenziale elettrostatico originato da un dipolo localizzato nel punto $ae^{i\phi}$ sul bordo del cerchio.

La rappresentazione integrale della soluzione fornisce inoltre una naturale nozione di soluzione generalizzata, valida per dati al bordo non regolari.

In generale, dato un dominio chiuso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1 a tratti, la soluzione del problema di Dirichlet relativo ad un dato al bordo $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \nabla_y G(x, y) \cdot \nu\, d\sigma(y)\,,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie, ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e la funzione $G(x, y)$, definita per $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, è detta funzione di Green relativa ad Ω. Denotiamo $\Gamma(z)$, per $z \in \mathbb{R}^n$ la soluzione fondamentale del Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ (ovvero Γ è il potenziale elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa unitaria puntiforme posta nell'origine: per $n = 2$ si ha $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\log|z|$, per $n > 2$ si ha $\Gamma(z) = c_n^{-1}|z|^{2-n}$, con $\frac{c_n}{2-n} = |\partial B(0, 1)|$ l'area $(n-1)$-dimensionale della superficie sferica $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$). La funzione di Green è quindi univocamente determinata dalle seguenti condizioni: $G(x, y) = \Gamma(x - y) + w(x, y)$ con $\Delta_y w(x, y) = 0$ in Ω, e $G(x, y) = 0$ per $y \in \partial\Omega$, ovvero $w(x, y) = -\Gamma(x - y)$ per $y \in \partial\Omega$ (l'unicità deriva dal fatto che la funzione $y \mapsto w(x, y)$ è soluzione di un problema di Dirichlet).

La formula di rappresentazione per la soluzione u del problema di Dirichlet si ottiene dall'identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}$$

ponendovi formalmente $v(y) = G(x, y)$, e osservando che $\Delta u = 0$ in Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$. (In realtà ponendo $v = G_\epsilon(x, y) = \Gamma_\epsilon(x - y) + w(x, y)$ e passando al limite per $\epsilon \to 0$, dove Γ_ϵ è tale che $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = 0$ per $|z| > \epsilon$ e $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = \omega_n^{-1}\epsilon^{-n}$ per $|z| \leq \epsilon$, con ω_n il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$: si verifica che vale $G_\epsilon(x, y) = G(x, y)$ per $|x - y| \geq \epsilon$

(in particolare, per $y \in \partial\Omega$), e si ha

$$\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x,y) = \int_\Omega u(y)\Delta_y \Gamma_\epsilon(x-y) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y)\omega_n^{-1}\epsilon^{-n}$$
$$= u(\xi) \quad \text{per un certo } \xi \in B(x,\epsilon)\,,$$

per il teorema della media integrale. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ha $u(\xi) \to u(x)$.

La determinazione della funzione di Green per domini dalla geometria semplice si può ottenere mediante il metodo delle cariche immagini: posta una carica nel punto $x \in \Omega$ se ne pongono altre in punti opportuni esterni a Ω in modo che il potenziale generato dalla distribuzione risultante abbia la frontiera $\partial\Omega$ come insieme di livello (ossia $\partial\Omega$ risulti una superficie equipotenziale): nel caso del semipiano (rispettivamente, del semispazio) viene posta una carica di segno opposto nel punto simmetrico rispetto al bordo. Nel caso del cerchio (rispettivamente della palla), viene posta una carica di segno opposto (e intensità opportuna) nel punto inverso rispetto alla circonferenza (rispettivamente, alla sfera) che costituisce il bordo del dominio.

Risoluzione del problema di Dirichlet in domini semplicemente connessi via Teorema della mappa di Riemann (non svolto a lezione!). Sia u la soluzione del problema di Dirichlet su D con dato al bordo g su ∂D. Fissato $z_0 \in D$ si consideri una trasformazione conforme $w = f(z,z_0) : D \to B \equiv \{|w| \le 1\}$ tale che $f(z_0,z_0) = 0$. Detta $U(w) = U(f(z,z_0)) = u(z)$, si ha che U risolve il problema di Dirichlet in B con dato al bordo $\tilde{g}(w) = \tilde{g}(f(z,z_0)) = g(z)$.

Consideriamo la funzione olomorfa $\log(f(z,z_0)) = \log w = \log|w| + i\arg w$, e sia $z \in \partial D$. Sia (τ,n) una base ortonormale di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ con τ tangente a ∂D (e verso antiorario) e n la normale esterna a D in $z \in \partial D$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che per quel fissato $z \in \partial D$ si abbia $(n,\tau) \equiv (e_1,e_2)$, la base canonica di $\mathbb{R}^2$. In particolare, essendo $\log w = \log(f(z,z_0))$ olomorfa, valgono le relazioni di Cauchy-Riemann

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\log w = \frac{\partial}{\partial n}\log w + i\frac{\partial}{\partial \tau}\log w$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial n}\log|w| = \frac{\partial}{\partial \tau}\arg w\,.$$

Si parametrizzi ora $w \in \partial B$ ponendo $w = e^{i\psi}$, $0 \le \psi \le 2\pi$ ($\equiv \psi = \arg w$). In particolare, $\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial n}\log|w| = \frac{\partial}{\partial n}\log|f(z,z_0)|$. Per la proprietà della media, vale

$$u(z_0) = U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{g}(e^{i\psi})d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} g(z)\frac{\partial\psi}{\partial\tau}d\tau$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} g(z)\frac{\partial}{\partial n}\log|f(z,z_0)|d\tau\,.$$

La funzione $G(z,z_0) = \log|f(z,z_0)|$ $=\mathrm{Re}\,[\log(f(z,z_0))]$ si dice funzione di Green per il Laplaciano relativamente al dominio D. Nel caso D sia il semipiano $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, si ha ad esempio $f(z,z_0)=\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}$, da cui $\log f(z,z_0)=\log(z-z_0)-\log(z-\bar z_0)$ e dato che su $\partial D=$Im $z=0$ si ha $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial y}=-i\frac{\partial}{\partial x}$, si ottiene, ponendo $z=x+iy$ e $z_0=x_0+iy_0$,

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x,0,x_0,y_0)=-i\left[\frac{1}{x-z_0}-\frac{1}{x-\bar z_0}\right]=\frac{1}{i}\frac{z_0-\bar z_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}=\frac{2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\,.$$

si deduce la formula di rappresentazione integrale della soluzione u con dato al bordo $u(x,0)=g(x)$ attraverso il nucleo di Poisson per il semipiano $y>0$:

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}g(x)dx\,.$$

Nel caso in cui $D=B(0,a)$, si considera $f(z,z_0)=a\frac{z-z_0}{z\bar z_0-a^2}$. Posto $z_0=re^{i\theta}$, $z=ae^{i\phi}$, su $\partial B(0,a)$ si ha $\frac{\partial}{\partial n}=-i\frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}$ e $d\tau=ad\phi$ (per cui in particolare $\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}d\tau=\frac{\partial\zeta}{\partial\phi}d\phi$ per ogni funzione ζ). Essendo $\log f(z,z_0)=\log a+\log(z-z_0)-\log(z\bar z_0-a^2)$, si ricava

$$\begin{aligned}-i\frac{\partial}{\partial\phi}\log f(z,z_0)&=-i\left[\frac{iae^{i\phi}}{ae^{i\phi}-z_0}-\frac{ie^{i\phi}\bar z_0}{e^{i\phi}\bar z_0-a}\right]\\&=\frac{(z_0\bar z_0-a^2)e^{i\phi}}{(-a^2-z_0\bar z_0)e^{i\phi}+az_0+a\bar z_0e^{i2\phi}}\\&=\frac{a^2-r^2}{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,.\end{aligned}$$

Si riottiene così la formula di rappresentazione integrale per la soluzione attraverso il nucleo di Poisson per il cerchio.

Lezione del 10/1/12 (2 ore). Trasformata di Fourier in L^1. Motivazioni: analisi in frequenza di segnali non periodici (o distribuzioni statistiche o densità di probabilità), risoluzione di equazioni alle derivate parziali definite su tutto lo spazio. Confronto formale con le serie di Fourier e formula di inversione (sintesi o ricostruzione del segnale). Proprietà della trasformata di Fourier: se $f\in L^1(\mathbb{R})$ allora $||\hat f||_{L^\infty}\le||f||_{L^1}$ e si ha $\hat f(\xi)\in C^0(\mathbb{R})$. La continuità di $\hat f$ discende immediatamente per convergenza dominata. Inoltre $\hat f(\xi)\to0$ per $|\xi|\to+\infty$ (si dice che $\hat f\in C^0_0(\mathbb{R})$): questo fatto si dimostra approssimando f in L^1 mediante opportune funzioni f_n le cui trasformate (che convergono uniformemente a $\hat f$ su $\mathbb{R}$) tendono esplicitamente a zero all'infinito.

Ad esempio: sia f_n una successione di funzioni semplici (a gradino) convergenti in media ad $f\in L^1(\mathbb{R})$, allora $||\hat f_n-\hat f||_{L^\infty}\le||f_n-f||_{L^1}\to0$, e vale $\hat f_n\in C^0_0(\mathbb{R})$, come si dimostra facilmente calcolando la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo: posto $g(t)=1$ per $|t|\le a$ e $g(t)=0$ per $|t|>a$, si ha $\hat g(\xi)=2\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$, ovvero $\hat g\in C^0_0(\mathbb{R})$.

Trasformata di Fourier e traslazioni, dilatazioni (ritardo, modulazione, effetto Doppler), simmetrie (parità, disparità), derivazioni e moltiplicazioni. Relazione tra regolarità di f e decadimento all'infinito di $\hat f$ (e reciprocamente). Trasformata di Fourier di una gaussiana.

Lezione del 12/1/12 (2 ore). Proprietà del prodotto di convoluzione di funzioni integrabili: commutatività, associatività. Stima di continuità in $L^1(\mathbb{R})$: $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. Regola di derivazione di un prodotto di convoluzione: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^k(\mathbb{R})$ si ha $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ e $[f*g]^{(k)} = f * [g^{(k)}]$. Delta di Dirac (alias impulso ideale alias massa/carica puntiforme) e identità approssimate. Regolarizzazione di funzioni integrabili. Esempio: il filtro gaussiano. Trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione. La funzione sinc come esempio di filtro passa-basso. Formula di Parseval $\int \hat{u}v = \int u\hat{v}$. Formula di inversione per funzioni $u \in L^1 \cap C_0^0(\mathbb{R})$ con $\hat{u} \in L^1$.

Lezione del 17/1/12 (1 ora). Dimostrazione della formula di inversione via identità approssimate. Teorema di Plancherel ed estensione della trasformata di Fourier ad un'isometria suriettiva di $L^2(\mathbb{R})$: per $u \in L^2(\mathbb{R})$ si pone $\hat{u} := \lim \hat{u}_n$ dove il limite è inteso in $L^2(\mathbb{R})$ e $u_n \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$ è una successione tale che $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R})$ (per cui, per Plancherel, $\hat{u}_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, che è completo, e dunque è convergente). Rappresentazione della trasformata di funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ come integrale nel senso del valor principale convergente per q.o. frequenza. Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ con dato iniziale in $L^1(\mathbb{R})$. Nucleo del calore. Proprietà regolarizzante dell'equazione del calore.

Lezione del 19/1/12 (2 ore). Cenni sulla trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^n$. Equazione del calore e nucleo del calore in $\mathbb{R}^n$.

Segnali causali. Funzione di Heaviside. Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Trasformata di Laplace. Ascissa di convergenza. La trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza (via Teorema di derivazione sotto il segno di integrale o via Teorema di Morera). Trasformata della funzone di Heaviside. Proprietà della trasformata di Laplace rispetto ad alcune operazioni: ritardo, modulazione, convoluzione, integrazione e derivazione. Trasformata di Laplace di polinomi, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali.

Lezione del 24/1/12 (4 ore). Teoremi del valore iniziale e finale. Relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier. Formula di inversione di Riemann-Fourier. Formula di Heaviside per l'inversione di funzioni razionali. Trasformata della delta di Dirac δ_0. La delta di Dirac come derivata (nel senso delle distribuzioni) della funzione di Heaviside. Trasformata di segnali periodici. Applicazione alla risoluzione di problemi differenziali ai valori iniziali (anche con la presenza di termini impulsivi): funzione di trasferimento, soluzione fondamentale. Derivata della delta di Dirac (dipolo) e sua trasformata di Laplace. Risoluzione di alcune equazioni differenziali, integrali, integro-differenziali mediante trasformata di Laplace. Equazioni integrali di Volterra con nuclei di convoluzione (ossia filtri invarianti per traslazioni). Equazione di Bessel, funzione di Bessel J_0 e sua trasformata. Calcolo di inverse di trasformate mediante sviluppi di Laurent.

Lezione del 26/1/12 (2 ore). Segnali causali discreti. Trasformata zeta. Relazione con la trasformata di Laplace. Formula del ritardo. Convoluzione discreta. Regione di convergenza. Formula di inversione. Applicazione alla risoluzione di equazioni alle differenze. Esercizi riepilogativi.

Bibliografia.

Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill (1987).
Matthews, Howell, *Complex analysis for mathematics and Engineering*, Jones & Bartlett (2006).
Spiegel, *Laplace Transforms*, collana Schaum, Mc Graw-Hill (1994).
Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations*, Dover (1995).
De Marco, *Analisi Matematica 2.*
Henrici, *Applied and computational Complex Analysis*, Wiley (1974).