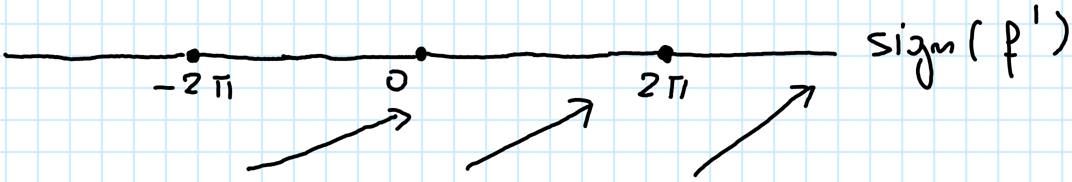
Esercizio Ho $f(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ con $\xi = 0$ radice di $f(x) = 0$.

(a) Verifico che $\xi = 0$ è radice ed è l'unica:

$f(0) = 0 - \operatorname{sen}(0) = 0 - 0 = 0$

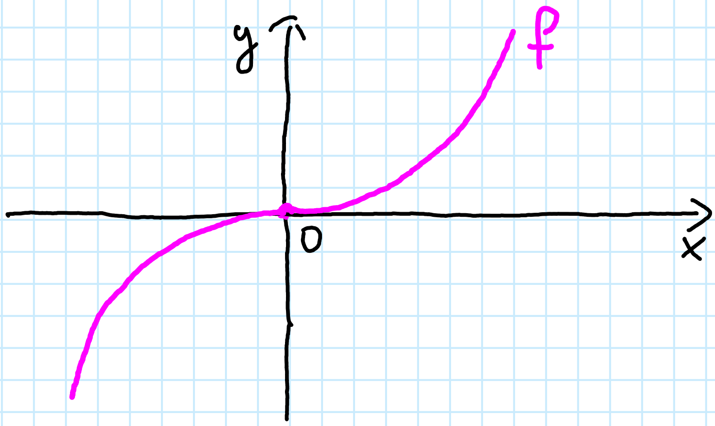
Per vedere che è unica guardo se f è monotona in senso stretto. Ho

$$f'(x) = (x - \operatorname{sen}(x))' = 1 - \cos(x) \geq 0$$



sempre crescente $\Rightarrow$ ξ è unica!

Per inciso è $f''(x) = \operatorname{sen}(x)$ per cui il grafico di f vicino a $x = 0$ è



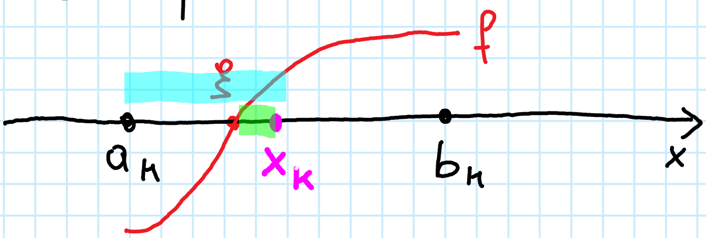
(b) Applicare la bisezione partendo da $[a_0, b_0] = [-0.5, 1]$

$[a_0, b_0] = [-0.5, 1] \Rightarrow x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = 0.25$

$[a_1, b_1] = [-0.5, 0.25] \Rightarrow x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = -0.125$

$[a_2, b_2] = [-0.125, 0.25] \Rightarrow x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = 0.0625$

Stimiamo il numero di iterazioni del metodo di bisezione per avere un errore minore di 10^{-6}.



$$|e_k| = |x_k - \xi| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \dots\dots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$$

Per avere $|e_k| < 10^{-6}$ basta imporre che sia

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} < 10^{-6} \iff \frac{1-(-0.5)}{2^{k+1}} < 10^{-6}$$

che risolvo rispetto a k:

$$1,5 < 2^{k+1} \cdot 10^{-6} \iff 1.5 \cdot 10^{6} < 2^{k+1} \iff$$

$$\log_{10}(1.5 \cdot 10^{6}) < (k+1)\log_{10}(2) \iff$$

$$k+1 > \frac{\log_{10}(1.5 \cdot 10^{6})}{\log_{10}(2)} \approx 20.52 \implies k > 19.52$$

Dato che $k \in \mathbb{N}$, servono 20 passi di bisezione.

(c) Trovo la molteplicità di $\xi = 0$.

$$f(x) = x - \operatorname{sen}(x) \implies f(\xi) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \implies f'(\xi) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f''(x) = \operatorname{sen}(x) \implies f''(\xi) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

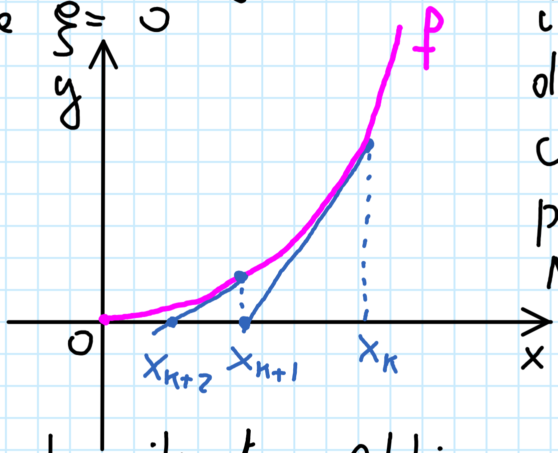
$$f'''(x) = \cos(x) \implies f'''(\xi) = \cos(0) = 1 \neq 1$$

Allora $\xi = 0$ ha molteplicità $r = 3$.
Dato che $r = 3 > 1$, Newton ha ordine di convergenza $p = 1$. La costante asintotica dell'errore

giovedì 7 aprile 2016 11:02

$$M = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

L'interpretazione grafica di Newton dice che il metodo converge a $\xi = 0$ in modo monotono decrescente. Allora, dato che il metodo ha ordine $p = 1$, la costante asintotica M deve essere minore di 1.



Calcolo le tre iterate. Abbiamo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k - \operatorname{sen}(x_k)}{1 - \cos(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sono RADIANTI !!!

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - \operatorname{sen}(x_0)}{1 - \cos(x_0)} = 1 - \frac{1 - \operatorname{sen}(1)}{1 - \cos(1)} = 0.655145072$$

in memoria nella calcolatrice e richiamato per il calcolo di x_2!

$$x_2 = 0.433590368$$

$$x_3 = 0.288148401$$

Dato che il metodo ha ordine $p = 1$, il grafico di $\log_{10}(|e_k|)$ è lineare:

"effetto anomalo". A cosa è dovuto?

(d) Stimiamo M usando le iterate calcolate prima

$$M \approx \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{p}} \approx \frac{|x_{k+2} - x_{k+1}|}{|x_{k+1} - x_k|}$$

$p = 1$

Nel caso in esame ho

$$M \approx \frac{|x_3 - x_2|}{|x_2 - x_1|} = 0.656$$

in buon accordo col valore teorico.

(e) Stabiliamo (una stima!!) il numero di iterazioni necessarie a Newton per avere un errore minore di 10^{-9}?

Abbiamo

$$\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} \approx M \Rightarrow |e_n| \approx M|e_{n-1}| \approx \dots \approx M^k \cdot |e_0|$$

Ho $|e_0| = |x_0 - \xi| = |1 - 0| = 1$. Allora ho

$$|e_k| < 10^{-9} \Leftrightarrow M^k < 10^{-9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^k < 10^{-9} \Leftrightarrow$$

$$k \underbrace{\log_{10}\left(\underbrace{\frac{2}{3}}_{<1}\right)}_{<0} < -9 \Leftrightarrow k > \frac{-9}{\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)} = 51.10$$

Servono, circa, 50 iterazioni. La stima è più o meno buona a seconda di quanto è lineare il grafico di $\log_{10}(|e_n|)$ per <u>TUTTI</u> i k!!

(f) Il metodo di Newton riprende l'ordine $p = 2$ con

$$x_{n+1} = x_n - r\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - 3\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$$

$$= x_n - 3\frac{x_n - \sin(x_n)}{1 - \cos(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Calcolo le prime tre iterate partendo da $x_0 = 1$:

giovedì 7 aprile 2016 11:02

$x_0 = 1$

$x_1 = -3.4564783 \cdot 10^{-2}$

$x_2 = 1.378287 \cdot 10^{-6}$ $\quad x_2 = 1.376571\ldots \cdot 10^{-6}$ (Matlab)

$x_3 = 1.378287 \cdot 10^{-6}$ $\quad x_3 = 3.539\ldots \cdot 10^{-11}$ (Matlab)

(b) Applichiamo le secanti variabili partendo da $x_0 = 1$, $x_1 = 0.5$

Ho

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$x_0 = 1$

$x_1 = 0.5$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 4{,}2543\ldots \cdot 10^{-1}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 3.0472876\ldots \cdot 10^{-1}$$

x_k si avvicina lentamente a $\xi = 0$; è ragionevole perché si comporta come Newton (all'incirca!).