Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 9
28 novembre 2012

1. Sia $\mathbb{Q} \subset K$ un'estensione di grado 2. Si dimostri:
   (a) esiste $u \in \mathbb{Q}$ tale che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{u})$,
   (b) l'assegnazione $a + b\sqrt{u} \mapsto a - b\sqrt{u}$ definisce un isomorfismo di anelli $\varphi : K \longrightarrow K$,
   (c) esistono solo due isomorfismi di anelli $\varphi : K \longrightarrow K$ tali che $\varphi|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

   (8 punti)

2. (a) Sia $z = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\sin\frac{2\pi}{n}$. Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(z)$ è un'estensione normale.
   (b) Per $z = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}$ si dimostri $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 4$ e si trovi il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.
   (c) L'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(2 + 3i)$ è un campo? Se sì, si determini la sua caratteristica.

   (6 punti)

3. Sia $\overline{\mathbb{Q}}$ l'insieme dei numeri algebrici, ovvero l'insieme di tutti i numeri complessi α che sono algebrici su $\mathbb{Q}$. Si dimostri:
   (a) $\overline{\mathbb{Q}}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$.
   (b) $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ è un'estensione algebrica di grado infinito.
   (c) Ogni elemento di $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ è trascendente su $\overline{\mathbb{Q}}$.

   (6 punti)

4. Siano p un numero primo, $n \in \mathbb{N}$ e m un divisore positivo di n. Si dimostri:
   (a) Ogni gruppo ciclico di ordine n contiene un sottogruppo di ordine m.
   (b) Ogni campo finito di p^n elementi contiene un sottocampo di p^m elementi.

   (*6 punti*)

5. Si determini il gruppo di Galois dell'estensione $\mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ e si decida se si tratta di un'estensione di Galois. *(6 punti)*

Consegna: mercoledì 5 dicembre durante la lezione.