Matematica e Statistica

Prova d'esame (26/06/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Matematica e Statistica

Prova di $\boxed{\text{MATEMATICA}}$ (26/06/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ______________

IN STAMPATELLO VR ······

**** Svolgere prima i punti* (a) *di* *<u>tutti</u>* *gli esercizi; solo in seguito i punti* (b). ***** **▶▶▶▶ Test a quiz sul retro ▶▶▶▶**

(1) (a) Nello spazio tridimensionale il piano Π è parallelo all'asse y e passa per i punti $A(3,1,-1)$ e $B(1,2,0)$, mentre la retta r passa per l'origine ed è ortogonale a Π. Determinare per entrambi una forma parametrica e una cartesiana.

(b) Detta $\mathcal{C}$ la circonferenza orizzontale di centro l'origine e raggio 1, qual è il punto (o i punti) di $\mathcal{C}$ più vicino a r?

(2) Studiare (giustificando le conclusioni) l'andamento di $f(x) = \dfrac{\log|x|}{x^2+2x}$, e tracciarne il grafico.[1]

(3) (a) Calcolare gli integrali $\displaystyle\int_0^1 x^2\, e^{-2x}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$.

(b) Disegnare $S = \big\{(x,y) : -y \le x \le \pi,\ -\sqrt{x} \le y \le \sin(\tfrac{x}{2})\big\}$, e calcolarne l'area.

(4) (a) Data $g(x,y) = \dfrac{x+1}{x^2+y^2+1}$, determinarne dominio, zeri e segno, disegnando i risultati. Trovarne i punti stazionari ed eventuali estremi locali. (Facoltativo: descrivere le curve di livello $g(x,y) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, e dedurne quanto vale il limite di g a ∞_2).

(b) Calcolare gli estremi assoluti di g sull'insieme $\mathcal{T} = \{(x,y) : y \ge -2,\ y \le x \le 2\}$.

(5) Sono date le equazioni differenziali $xy' - y = x^2 \cos x + 1$ e $y'' + y = 2\cos x - 1$.

(a) Trovare le soluzioni di ciascuna delle due equazioni, specificando se ve ne sono in comune.

(b) Quali delle soluzioni ammettono limite quando x tende a $+\infty$?

[1] Per lo studio della crescenza potrebbe essere utile un confronto grafico. Non è richiesto lo studio della convessità.

Matematica e Statistica

Prova di $\boxed{\text{STATISTICA}}$ (26/06/2013)

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Cognome-Nome ______________________________ Matr. ________________

IN STAMPATELLO VR · · · · · ·

**** Attenzione: compiti illeggibili non verranno corretti ! **** ▶▶▶▶ **Test a quiz sul retro** ▶▶▶▶

Esercizio 1)

Un medico vuole monitorare la glicemia di un soggetto. A tale scopo fa eseguire 11 prelievi di sangue ad intervalli reolgari e mediante un fingerstik (apparecchio personale per la misurazione della glicemia) ottenendo le seguenti musurazioni espresse in mg/dl

80	120	88	73	89	88	84	64	90	105	98

Il candidato

a) Determini la tipologia del carattere.
b) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.
c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
d) Fornisca una rappresentazione grafica dei dati.

Esercizio 2)

Il candidato usi le osservazioni presentate nell'esercizio precedenti per stimare puntualmente e per intervallo il valore atteso della glicemia del paziente in esame. Il candidato indichi le ipotesi necessarie e proceda al calcolo anche se queste non fossero soddisfatte.

Esercizio 3)

Per cinque clienti di un laboratorio di analisi, si è misurato il numero di anni di clientela ed il numero di esami svolti nel periodo, ottenedo le seguenti osservazioni:

A(12; 35) B(13; 40) C(11;40) D(25; 105) E(39;130)

dove la lettera indica il codice del cliente, il primo numero gli anni di fideiussione, ed il secondo numero il quantitativo di esami richiesti.

Il candidato

a) indichi il carattere della serie bi-variata ottenuta
b) se possibile calcoli un indice sintetico di posizione
c) se possibile calcoli un indice sintetico di variabilità
d) fornisca una rappresentazione grafica adeguata dei dati
e) il candidato ipotizzi un legame di tipo lineare e:
   e1) calcoli un modello per tale legame
   e2) valuti la bontà del modello ottenuto (quantitativamente e qualitativamente)
   e3) utilizzi il modello ottenuto per prevedere quanti esami richiede un soggetto al primo anno di fideiussione

Esercizio 4)

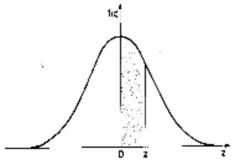
Si considerino i seguenti eventi dichiarati indipendenti.

E_1 : si ottenga $x \geq 0$ dove x è estratto da una v. c. distribuita come un $\chi^2(2)$.
E_2: si ottenga y>2 dove y è estratto da una v. c. *Unif(-5;5)*.

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.
b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente dipendenti, evento certo ed evento impossibile.

Tavola I

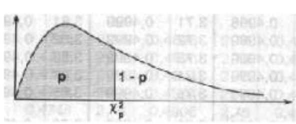
Integrali della variabile casuale normale standardizzata z



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tavola II

Integrali della variabile casuale chi quadrato a v gradi di libertà.



v \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25	0,50	0,75	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0000	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	0,102	0,455	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37	4,11	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,2	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,4	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,5	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,3	13,7	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,3	14,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,3	16,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,2	13,3	17,1	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,0	14,3	18,2	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,9	15,3	19,4	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,8	16,3	20,5	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	13,7	17,3	21,6	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	14,6	18,3	22,7	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	15,5	19,3	23,8	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	16,3	20,3	24,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	17,2	21,3	26,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	18,1	22,3	27,1	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	19,0	23,3	28,2	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	19,9	24,3	29,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	20,8	25,3	30,4	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	21,7	26,3	31,5	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	22,7	27,3	32,6	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	23,6	28,3	33,7	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	24,5	29,3	34,8	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7

Soluzioni

MATEMATICA

(1) (a) Il piano Π è parallelo all'asse y e passa per i punti $A(3,1,-1)$ e $B(1,2,0)$, dunque sarà parallelo ai vettori $(0,1,0)$ e $(3,1,-1)-(1,2,0)=(2,-1,-1)$: una forma parametrica sarà allora $\Pi = \{(1,2,0)+s(0,1,0)+t(2,-1,-1) : s,t \in \mathbb{R}\} = \{(1+2t, 2+s, 3t, -t) : s,t \in \mathbb{R}\}$; sostituendo poi $t=-z$ e $s=y-2$ in $x=1+2t$ si ottiene $x=1-2z$, ovvero $x+2z=1$. • La retta r, ortogonale sia a Π che ha equazione cartesiana $x+2z=1$, sarà dunque parallela al vettore $(1,0,2)$, da cui una forma parametrica $r=\{(0,0,0)+t(1,0,2) : t\in\mathbb{R}\} = \{(t,0,2t) : t \in \mathbb{R}\}$. Sostituendo poi $t=x$ in $(y,z)=(0,2t)$ si ottiene una forma cartesiana dal sistema delle due equazioni $y=0$ e $z=2x$.

(b) Il punto generico della circonferenza orizzontale $\mathcal{C}$ di centro $(1,1,0)$ e raggio 1 è del tipo $P(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ con $-\pi < \theta \le \pi$, e la sua distanza (al quadrato) dal punto generico $Q(t)=(t,0,2t)$ della retta r è data da $f(\theta,t)=(t-\cos\theta)^2+(0-\sin\theta)^2+(2t-0)^2 = 5t^2-2t\cos\theta+1$. Per un θ fissato la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial t}=10t-2\cos\theta$ è ≥ 0 quando $t \ge \frac{1}{5}\cos\theta$, dunque il punto di r più vicino al punto $P(\theta)$ è quello con $t=\frac{1}{5}\cos\theta$: ne segue che la distanza di $P(\theta)$ da r è data da $d(\theta)=f(\theta,\frac{1}{5}\theta)=1-\frac{1}{5}\cos^2\theta$, e allora anche senza fare la derivata rispetto a θ è chiaro che tale distanza diventa minima quando $\cos\theta=\mp 1$, ovvero per $\theta=0$ e per $\theta=\pi$. I punti di $\mathcal{C}$ più vicini a r sono pertanto $P(0)=(1,0,0)$ e $P(\pi)=(-1,0,0)$.

(2) (Figura 1) La funzione $f(x)=\frac{\log|x|}{x^2+2x}$ è definita per $x \ne -2, 0$, e nel dominio è derivabile infinite volte. Vale $f(x)=0$ quando $\log|x|=0$, ovvero $x=\mp 1$. Il numeratore è positivo per $|x|>1$ (ovvero $x<-1$ oppure $x>1$), il denominatore per $x<-2$ oppure $x>0$, dunque vale $f(x)>0$ per $x<-2$, $-1<x<0$ o $x>1$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$, $-2^\mp$ e in $0^\mp$: i limiti $\lim_{x\to -2^\mp} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^\mp} f(x)$ sono determinati e valgono $\pm\infty$, mentre $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)$ è in forma indeterminata ma si vede subito (con de l'Hôpital, o raccogliendo x^2 sotto) che vale 0^+: dunque $y=0$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$, mentre $x=-2$ e $x=0$ sono asintoti verticali bilateri. Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2+2x)-(2x+2)\log|x|}{(x^2+2x)^2}=\frac{x+2-2(x+1)\log|x|}{(x^2+2x)^2}$: si ha dunque $f'(x)=0$ se e solo se $\log|x|=\frac{x+2}{2(x+1)}$, e un confronto grafico tra $\log|x|$ (il logaritmo simmetrizzato) e $\frac{x+2}{2(x+1)}$ (un'omografica con asintoti $x=-1$ e $y=\frac{1}{2}$ e che si annulla per $x=-2$) mostra senza dubbio che ciò accade in un unico punto $x=\alpha$ con $1<\alpha<2$ (vale in realtà $\alpha\sim 1{,}95$). Similmente, se $x \gtrless -1$ si ha poi $f'(x)>0$ quando $\log|x| \lessgtr \frac{x+2}{2(x+1)}$, e sempre per confronto grafico ciò accade per $x<\alpha$: in altre parole f è strettamente crescente per $x<-2$, $-2<x<0$ e $0<x<\alpha$ e strettamente decrescente per $x>\alpha$, pertanto ammette un massimo locale in $x=\alpha$ (che in realtà è piuttosto basso, vale $f(\alpha)\sim 0{,}08$).

(3) (a) Integrando due volte per parti si ha $\int_0^1 x^2\,e^{-2x}\,dx = (x^2\,\frac{e^{-2x}}{-2}]_0^1 - \int_0^1 2x\,\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = (-\frac{1}{2e^2})-(0)+\int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2e^2}+(x\frac{e^{-2x}}{-2}]_0^1-\int_0^1 1\,\frac{e^{-2x}}{-2}\,dx = -\frac{1}{2e^2}+(-\frac{1}{2e^2})-(0)+\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{e^2}+(\frac{e^{-2x}}{-4}]_0^1 = -\frac{1}{e^2}+(-\frac{1}{4e^2})-(-\frac{1}{4}) = \frac{e^2-5}{4e^2}\sim 0{,}08$. • Posto $x=t^3$, da cui $dx=3t^2\,dt$, si ricava $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int_0^1 \frac{t^3}{t+1}\,3t^2\,dt = 3\int_0^1 \frac{t^5}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{t^5}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{(t+1)(t^4-t^3+t^2-t+1)-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 (t^4-t^3+t^2-t+1-\frac{1}{t+1})\,dt = (\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\log|t+1|]_0^1 = (\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\log 2)-(0)=\frac{47}{60}-\log 2\sim 0{,}1$.

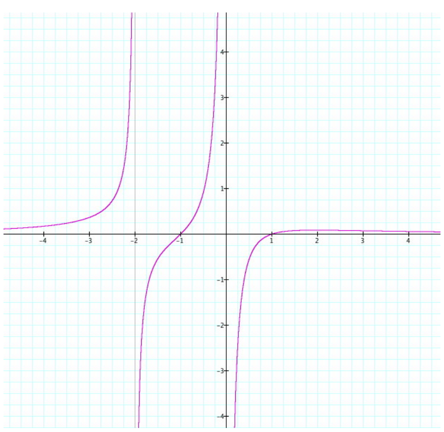
(b) (Figura 2) L'area di $S=\{(x,y) : -y\le x\le\pi,\ -\sqrt{x}\le y\le \sin(\frac{x}{2})\}$ vale $\int_0^\pi \sin(\frac{x}{2})\,dx+\int_\pi^1(-\sqrt{x})\,dx+\int_1^0(-x)\,dx = (-2\cos(\frac{x}{2})]_0^\pi+(-\frac{2}{3}x\sqrt{x}]_\pi^1+(-\frac{1}{2}x^2]_1^0 = (0)-(-2)+(-\frac{2}{3})-(-\frac{2}{3}\pi\sqrt{\pi})+(0)-(-\frac{1}{2}) = \frac{4\pi\sqrt{\pi}+11}{6}\sim 5{,}5$.

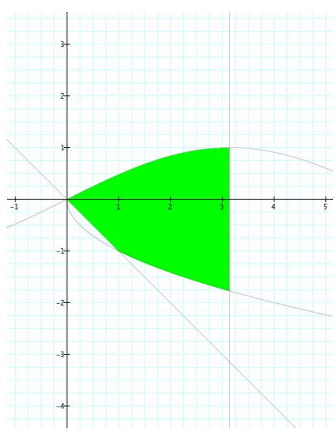
(4) (a) (Figura 3) Nella funzione $g(x,y)=\frac{x+1}{x^2+y^2+1}$ il denominatore non si annulla mai, dunque il dominio è tutto il piano $\mathbb{R}^2$; si tratta di una funzione differenziabile nel suo dominio, in quanto le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1(x^2+y^2+1)-2x(x+1)}{(x^2+y^2+1)^2}=\frac{y^2-x^2-2x+1}{(x^2+y^2+1)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}=(x+1)\frac{-2y}{(x^2+y^2+1)^2}=-2\frac{(x+1)y}{(x^2+y^2+1)^2}$ risultano continue. La funzione g è chiaramente pari rispetto a y; si annulla quando $x+1=0$, ovvero sulla retta verticale $x=-1$, ed è positiva quando $x>-1$; l'unico limite interessante è a ∞_2, e si può dimostrare che è uguale a 0 (in realtà non era richiesto, ma si veda un po' più sotto). I punti stazionari sono le soluzioni del sistema $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}=0$: da $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ si ricava $x=-1$ oppure $y=0$, che messi in $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ danno rispettivamente $y^2+2=0$ (priva di soluzioni) e $x^2+2x-1=0$, da cui $x=\pm\sqrt{2}-1$, ovvero i punti $A(\sqrt{2}-1,0)$ e $B(-\sqrt{2}-1,0)$. A conti fatti la matrice hessiana di g risulta $\mathsf{H}_g(x,y)=\begin{pmatrix} -2\frac{5x^2+y^2+1+3xy^2-x^3+3x}{(x^2+y^2+1)^3} & 2\frac{(3x^2-1-y^2+4x)y}{(x^2+y^2+1)^3} \\ 2\frac{(3x^2-1-y^2+4x)y}{(x^2+y^2+1)^3} & -2\frac{(x+1)(x^2-3y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix}$, e calcolando in A e in B il criterio dell'hessiano ci dice subito che essi sono rispettivamente punto di massimo e minimo locale (in realtà, come si può dimostrare, assoluto) per g. Esaminiamo infine le curve di livello $g(x,y)=k$, ovvero $x+1=k(x^2+y^2+1)$: per $k=0$ si ha come visto la retta $x=-1$, mentre per $k\neq 0$ si ottiene $x^2+y^2-\frac{1}{k}x+1-\frac{1}{k}=0$, ovvero $(x-\frac{1}{2k})^2+y^2=\frac{1}{4k^2}+\frac{1}{k}-1$, che quando il secondo membro è ≥ 0 (ovvero quando $4k^2-4k-1\leq 0$, cioè per $-\frac{\sqrt{6}-2}{4}\leq k\leq\frac{\sqrt{6}+2}{4}$) è la circonferenza di centro $(\frac{1}{2k},0)$ e raggio $\sqrt{\frac{1}{4k^2}+\frac{1}{k}-1}$: essendo evidente che per $k\to 0$ tale circonferenza va a raggiungere punti sempre più distanti dall'origine, questo motiva il fatto che il limite di g a ∞_2 vale 0.

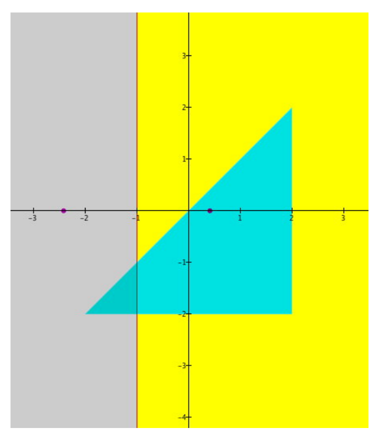
(b) (Figura 3) L'insieme $\mathcal{T}=\{(x,y): y\geq -2,\ y\leq x\leq 2\}$ è il triangolo pieno e chiuso di vertici $D(2,2)$, $E(2,-2)$ e $F(-2,-2)$: per la ricerca degli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ (che esistono in base a Weierstrass, essendo $\mathcal{T}$ un sottoinsieme compatto —ovvero chiuso e limitato— interamente contenuto nel dominio di g, che è continua) dividiamo $\mathcal{Y}$ nelle zone $\mathcal{T}_0$ dei suoi punti interni; $\mathcal{T}_1$ del bordo orizzontale privato dei vertici; $\mathcal{T}_2$ del bordo verticale privato dei vertici; $\mathcal{T}_3$ del bordo obliquo privato dei vertici; e $\mathcal{T}_4=\{D,\,E,\,F\}$ dei vertici. • Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_0$, tale punto dovrebbe essere in particolare stazionario per g: ma come visto prima i punti stazionari sono $A(\sqrt{2}-1,0)$ e $B(-\sqrt{2}-1,0)$, dei quali l'unico dentro $\mathcal{T}_0$ è A, naturale ed atteso candidato ad essere punto di massimo assoluto. •Sul lato $\mathcal{T}_1$ la funzione vale $\varphi_1(x):=g(x,-2)=\frac{x+1}{x^2+5}$, con $-2<x<2$. Se massimo o minimo assoluti fossero assunti in un punto di $\mathcal{T}_1$, in tale punto dovrebbe annullarsi la derivata $\varphi_1'(x)=-\frac{x^2+2x-5}{(x^2+5)^2}$, e per $-2<x<2$ ciò accade solo in $x=\sqrt{6}-1$. Abbiamo dunque un nuovo punto $G(\sqrt{6}-1,-2)$. • Similmente, sul lato $\mathcal{T}_2$ la funzione vale $\varphi_2(y):=g(2,y)=\frac{3}{y^2+5}$ con $-2<y<2$; la derivata $\varphi_2'(y)=-(\frac{6y}{(y^2+5)^2}$ si annulla in $y=0$, da cui il punto $H(2,0)$. • Sul lato obliquo $\mathcal{Q}_3$, che giace sulla bisettrice $x=y$ con $-2<x<2$, la funzione vale $\varphi_3(x):=g(x,x)=\frac{x+1}{2x^2+1}$; la derivata $\varphi_3'(y)=\frac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2}$ si annulla per $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, da cui i punti $L(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $M(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$. • Infine, i tre punti D, E, F di $\mathcal{Q}_4$ vanno tenuti tutti presenti. • Gli estremi assoluti di g su $\mathcal{T}$ potranno dunque essere assunti solo nell'ambito degli otto punti A, D, E, F, G, H, L, M: poiché $g(A)=\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}\sim 1{,}21$, $g(D)=g(E)=\frac{1}{3}\sim 0{,}33$, $g(F)=-\frac{1}{3}\sim -0{,}33$, $g(G)=\frac{1}{2(\sqrt{6}-1)}\sim 0{,}34$, $g(H)=\frac{3}{5}=0{,}6$, $g(L)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\sim 0{,}85$ e $g(M)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\sim 0{,}15$, il massimo assoluto di g su $\mathcal{T}$ è $\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$ (assunto in A) e il minimo assoluto è $-\frac{1}{3}$ (assunto in F).

(5) (a) L'equazione differenziale $xy'-y=x^2\cos x+1$ è lineare del primo ordine, perché per $x\neq 0$ può essere scritta nella forma $y'+p(x)\,y=q(x)$ con $p(x)=-\frac{1}{x}$ e $q(x)=x\cos x+\frac{1}{x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x)=-\log|x|$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int\frac{1}{|}x|(x\cos x+\frac{1}{x})\,dx=\sigma(\sin x-\frac{1}{x})$ (ove $\sigma=\mp 1$ è il segno di x): dunque le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo $y(x)=e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\,dx\ +k)=|x|(\sigma(\sin x-\frac{1}{x})+k)=x\sin x-1+kx$ al variare di $k\in\mathbb{R}$ (su uno dei due intervalli $x\gtrless 0$). • L'equazione $y''+y=2\cos x\ -1$ è del secondo ordine, lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2+1=0$ ha soluzione $t=\mp i$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x)=A\,\cos x+B\,\sin x$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$. Una soluzione particolare per la completa con $b_1(x)=2\cos x$ è del tipo $\tilde{y}_1(x)=x(a\,\cos x+b\,\sin x)$, e dai conti si ricava $(a,b)=(0,1)$, dunque $\tilde{y}_1(x)=x\sin x$; d'altra parte una soluzione particolare per la completa con $b_2(x)=-1$ è evidentemente la costante $\tilde{y}_2(x)\equiv -1$, dunque lo spazio di soluzioni dell'equazione completa è $y(x)=A\,\cos x+(B+x)\,\sin x-1$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$. • L'unica soluzione in comune è $y(x)=x\sin x-1$, ottenuta per $k=A=B=0$.

(b) Tra le soluzioni $y(x)=x\sin x-1+kx=(k+\sin x)x-1$ della prima equazione, quelle che ammettono limite quando x tende a $+\infty$ sono quelle con $k>1$ (in cui il limite vale $+\infty$) e quelle con $k<-1$ (in cui il limite vale $-\infty$). • Invece tra le soluzioni $y(x)=A\,\cos x+(B+x)\,\sin x-1$ della seconda equazione, nessuna ammette limite quando x tende a $+\infty$.







1. Il grafico della funzione dell'ex. 2. **2.** L'insieme dell'ex. (3.b). **3.** Ex. (4.b): zeri (rosso), segno positivo (giallo) e negativo (grigio) della funzione g; i punti stazionari (porpora); l'insieme $\mathcal{T}$ (azzurro).

STATISTICA

a) Determini la tipologia del carattere.

Il carattere è di tipo quantitativo (in quanto espresso da numeri) continuo (in quanto la concentrazione di fatto è una grandezza continua).

b*) Descriva e calcoli un indice di posizione adeguato ai dati.*

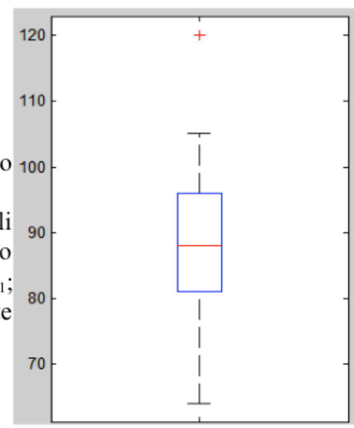
L'indice di posizione di una serie di osservazioni indica il valore centrale che viene assunto dalla serie. Gli indici di posizione visti a lezione sono tre: moda, mediana e media. Per i caratteri in esame sono calcolabili tutti e tre ma la moda non essendo presenti alte frequenze assolute non riulta indicativo. In questa sede si è scelto di calcolare la mediana (ovvero l'osservazione che bipartisce le osservazioni ordinate).
In questo caso si hanno 11 osservazioni pertanto la mediana deve lasciarne (11-1)/2 = 5 alla propria destra ed altrettante alla propria sinistra ovvero si considera la sesta osservazione (vedi a tabella a lato).

i	o_i	
1	64	
2	73	
3	80	Q_1 = (80 +84)/2 = 82
4	84	
5	88	
6	88	Q_2 = 88
7	89	
8	90	Q_3 = (90 +98)/2 = 94
9	98	
10	105	
11	120	

c) Descriva e calcoli un indice di variabilità adeguato ai dati.
Avendo scelto la mediana come indice di posizione l'indice di variabilità associato risulta essere la distanza interqualrtile. Per calcolare questo indice debbo fare la differenza fra il terzo ed i primo quartile. Il calcolo è mostratrato nella tabella a lato. Si ricorda che il primo (terzo) qualrtile è quell'osservazione preceduta (seguita) da (N-1)/4 osservazioni. Nel caso in esame si ha che (N-1)/4 = 2.5 Poiché non è possibile prendere l'osservazione 3.5 per il primo quartile si mediano la terza e la quarta osservazione. Riassumento la distanza interquartile risulta essere

$$Q_3 - Q_1 = 94 - 82 = 12$$

d) Fornisca una rappresentazione grafica opportuna.



Per caratteri quanitativi continui due rappresentazioni possibili sono l'istogramma ed il box plot. In questa sede discuteremo quest'ultimo.
Per poter tracciare il box-plot, nota mediana e quartili, si devono identificare gli estremi dei due "baffi" che completano il boxplot. Il baffo inferiore viene delimitato dal massimo fra il valoreadiacente inferiore (VAI) e la minima osservazione o_1; mentre il baffo superiore viene delimitato dal massimo fra il valore adiacente inferiore (VAI) e la massima osservazione o_{11} . Posta la costante *K=1.5* si ha che:

VAI = Q_1 - 1.5*(Q_3 -Q_1) = 82 -18 = 64 VAS = Q_2 + 1.5*(Q_3 -Q_1) = 94 +18 = 116
Da cui si ricava agevolemte diagramma a lato che mostra un outlier.

Esercizio 2)
Possiamo modellare il processo di generazione dei dati del presentati nell'esercizio 1 come il frutto di diverse estrazioni dalla variabile casuale

P : *glicemia di un soggetto*

avente distribuzione ignota. Si sono effettuate $n = 11$ osservazioni.
Continuando con il modello precedentemente definito l'esercizio richiede di stimare *E[P]* puntualmente e per intervallo.
La stima è possibile solo se la le estrazioni sono indipendenti ed identicamente distribuite e se la dimensione del campione è pari ad almeno 30 unità. Nel caso in esame entrambe nessuna delle ipotesi si può considerare verificata. Infatti i campioni sono troppo pochi e non sapendo quanto tempo intercorra fra le misurazioni non è facile dire se le misure di glicemia si influenzino fra di loro.

Lo stimatore puntuale del valore atteso è la media campionaria che, utilizzando i conti riportati in tabella produce la seguente stima

$$E[\hat{P}]=\bar{o}=\frac{\sum_{i=1}^{n} o_i}{n}=\frac{979}{11}=89$$

Per ottenere la stima per intervallo occorre fissare un livello i di confidenza *α*. Posto *α= 90%,* la stima per intervallo è in caso che la varianza della popolazione sia ignota è data dalla

$$E[P]\in\left[\bar{o}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\ \ ;\ \ \bar{o}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

ricordando la formula del calcolo della varianza campionaria ed utilizzando i conti riportati in tabella si ha che:

$$s^2=\sigma^2\frac{n}{n-1}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} o_i^2}{n}-\bar{o}^2\right)\frac{n}{n-1}=\left(\frac{89419}{11}-89^2\right)\frac{11}{11-1}=(8129-7921)1.1=228.8 \qquad z_{1-\frac{\alpha}{2}}=1.96$$

Pertanto l'intervallo richiesto è: $E[P]\in\left[89-1.96\sqrt{\frac{228.8}{11}}\ \ ;\ \ 89-1.96\sqrt{\frac{228.8}{11}}\right]=[80.06\ \ ;\ \ 97.34]$

i	o_i	o_i^2
1	64	4096
2	73	5329
3	80	6400
4	84	7056
5	88	7744
6	88	7744
7	89	7921
8	90	8100
9	98	9604
10	105	11025
11	120	14400
TOT	979	89419

Esercizio 3)
I dati forniti nell'esercizio descrivono una bivariata (x, y) dove

X: anni di fideiussione, Y: quantitativo di esami richiesti

a) indichi il carattere della serie bi-variata ottenuta

La serie bivariata è data dall'unione di due caratteri quantitativo discrteri pertanto non presenta il medesimo carattere.

b) Se possibile calcoli un indice sintetico di posizione adeguato

Formalmente la serie ammette due indice di posizioni: la media e la moda. Non essendo presenti frequenze significative la moda non è informativa, pertanto si procede al calcolo della media. Questa si ottiene unendo le medie dei caratteri considerate separatamente. Utilizzando i conti riportati nella tabella 1 si ha che

M (20; 70)

c) se possibile calcoli un indice sintetico di variabilità

L'indice di variabilità è dato dalla matrice di varianza/covarianza ottenuta usando le varianze dei due caratteri e la loro covarianza. Usando la i dati riportati nella Tabella 1 si ha che:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{580}{5} = 116 \qquad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{7850}{5} = 1570$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{2075}{5} = 415$$

Da cui si ha la seguente matrice

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 116 & 415 \\ 415 & 1570 \end{bmatrix}$$

e1) calcoli un modello per tale legame

Il modello utilizzato è quello di regressione lineare che dice che

$y_i = a\,x_i + b + e_i$ dove *e* rappresenta l'errore di misura.

Usando una stima ai minimi quadrati si riesce a stimare le costanti a e b ottenendo la retta di regressione che ha equazione

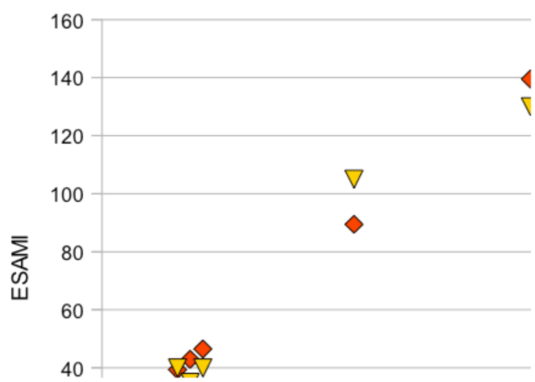
$$\hat{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x + \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \bar{x} \qquad \hat{y} = \frac{415}{116} x + 70 - \frac{415}{116} 20 \qquad \hat{y} = 3.58\,x - 1.55$$

e2) valuti la bontà del modello ottenuto (quantitativamente e qualitativamente)

Un buon indicatore della bontà del modello di regressione è dato dall'indice di correlazione

di Pearson

$$R^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0.945 \qquad R = 0.972$$



Poiche l'indice risulta prossimo all'unità si può asserire che il legame è plausibile. Ovviamente il dato deve essere confermato dalla visualizzazione del modello. Infatti il coefficientei di Pearson può anche dare risultati molto errati. A lato si riportano le presevisioni effettuate dal modello lineare (in rosso nel diagramma) che ben descrivono l'andamento dei dati

e3) utilizzi il modello ottenuto per prevedere quanti esami richiede un soggetto al primo anno di fideiussione

La risposta si ottiene applicando la retta di regessione nel punto di ascissa unitaria.

$$\hat{y}(1) = 3.58 * 1 - 1.55 = 2.03$$

Ci si aspetta quindi due esami.

osservazione	x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	y	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$	$(y - \bar{y})(x - \bar{x})$
A	12	-8	64	35	-35	1225	280
B	13	-7	49	40	-30	900	210
C	11	-9	81	40	-30	900	270
D	25	5	25	105	35	1225	175
E	39	19	361	130	60	3600	1140
Somma	100		580	350		7850	2075

Tabella 1 - analisi dati dell'esercizio 3.

Esercizio 4)

Nel testo si considerano come eventi elementari delle estrazioni da due vv. cc. continue. Si ricorda che per una v.c. continua *X*, la probabilità di ottenere una realizzazione *x* compresa fra due estremi x_{inf} ed x_{sup} è data dall'integrale (area sottesa) dalla densità di probabilità $f_X(x)$ fra x_{inf} ed x_{sup}. In simboli

$$P\left(x \in \left[x_{inf}\,;x_{sup}\right]\right)=\int_{x_{inf}}^{x_{sup}} f_X(\tau)\,d\tau$$

a) Il candidato calcoli le seguenti Probabilità: $P(E_1)$; $P(E_2)$; $P(E_1 \cup E_2)$ $P(E_1 | E_2)$.

Per il calcolo di $P(E_1)$, si deve calcolare l'area sottesa dalla curva della densità di probabilità di un chi quadro a *2* gradi di libertà da meno infinito a 0. Poiche i valori che assume la v.c. chi quadro per ogni possibile grado di liberta sono tutti non negativi la probabilità richiesta è l'evento certo.

La probabilità dell'evento E_2 è pari alla probabilità di estrarre un numero *y* positivo da una v. c. uniforme fra *-5* ed *5*. In questo caso è possibile ricavare la d.d.p. della v.c. *Y.* Basta imporre che l'area sottesa dalla d.d.p. sia unitaria. Pertanto si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\tau)\,d\tau=1$$

poiche la d.d.p è nulla per valori esterni all'intervallo *[-5; 5]* la predente diviene

$$\int_{-5}^{+5} f_Y(\tau)\,d\tau=1$$

ricordando che la d.d.p. è costante si ha che

$$\int_{-5}^{+5} Cd\,\tau=(5-(-5))C=10\mathrm{C}=1$$

da cui si ha che C= 1/10= 0.1.

Il calcolo della probabilità richiesta diviene ora facile

$$P(E_2)=P(y>2)=\int_2^5 \frac{1}{10}d\,\tau=(5-2)\frac{1}{10}=0.3$$

Propedeutico al calcolo delle altre due probabilità e il calcolo della probabilità dell'evento intersezione (ovvero che i due eventi si verifichino contemporaneamente). Per eventi indipendenti essa è il prodotto delle due probabilità ovvero

$$P(E_1 \cap E_2)=P(E_1)P(E_2)=1\cdot 0.3=0.3$$

Le restanti probabilità possono essere ricavate utilizzando la definizione assiomatica

$$P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)=1+0.3-0.3=1 \qquad P(E_1|E_2)=\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}=\frac{0.3}{0.3}=1$$

b) Il candidato fornisca la definizione dei seguenti eventi notevoli: eventi statisticamente indipendenti, evento certo ed evento impossibile.

Due eventi si dicono

- *statisticamente indipendenti* se il verificarsi di un evento non altera la probabilità del verificarsi dell'altro. Se A e B sono due eventi statisticamente indipendenti si ha che

  P(A|B) = P(A) *P(B|A) = P(B)*
- *certo*: un evento certo è un evento che si verifica sempre. Se E è un evento certo certo si ha che *P(E) =1*.
- *impossibile*: un evento impossibile è un evento che non si verifica mai. Se E è un evento impossibile certo si ha che *P(E) =0*.