Foglio 6

7 novembre 2013

Esercizio 1 (Punti 8)**.** Si consideri la seguente funzione $f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_s(x_1, x_2, x_3)^T = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + s, sx_1 + (s-1)x_3)^T$$

1. Per quali valori $s \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_s è lineare?
2. Per tali s, trovare lo spazio nullo e l'immagine di f_s.
3. Esiste una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che l'immagine di g coincide con l'immagine di f_s? In caso affermativo costruire g.
4. Esiste una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che lo spazio nullo di h coincide con l'immagine di f_s? In caso affermativo costruire h.

Esercizio 2 (Punti 6)**.** Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $v \longmapsto Av$, dove A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Si trovino l'immagine $Im(f)$ e lo spazio nullo $N(f)$ di f, e per ciascuno dei due sottospazi si trovi una base.
2. Si trovi un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = T \oplus N(f)$.
3. Si trovi un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Im(f)$

Esercizio 3 (Punti 4)**.** Si consideri l'aplicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $(x, y, z, w)^T \longmapsto (w, x+y, x+z, w)^T$. Sia N lo spazio nullo di f. Determinare un sottospazio T di $\mathbb{R}^4$ tale che $N \oplus T = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 4 (Punti 6)**.**

1. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1)^T = (2,4)^T$ e $f(0,2)^T = (1,3)^T$? È unica?
2. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1)^T = (2,4)^T$ e $f(1,1)^T = (1,5)^T$? È unica? In caso affermativo trovare lo spazio nullo e l'immagine di f.
3. Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(0,1,1)^T = (2,4)^T$ e $f(1,0,1)^T = (1,5)^T$? È unica?

Esercizio 5 (Punti 6)**.** Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \alpha x_4 = 8 \end{cases}$$

1. si scriva il sistema nella forma matriciale $A_\alpha x = b_\alpha$ e si trovi lo spazio nullo $N(A_\alpha)$.
2. si verifichi che $(2+\alpha,\ 0,\ 3-\alpha,\ -1)^T$ è una soluzione del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino tutte le soluzioni del sistema $A_\alpha x = b_\alpha$
4. Per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ si trovino le soluzioni del sistema $A_\alpha x = c_\alpha$, dove $c_\alpha = A_\alpha(i,\ \alpha^2,\ i+\sqrt{7}, -1)^T$