

Esercitazione III: validazione di un modello identificato mediante cross-validazione e test di bianchezza.

Si consideri il seguente modello ARMAX supposto come il modello “vero” (modello del sistema)

$$y(t) = a^* y(t-1) + b^* u(t-1) + e(t) + c^* e(t-1) \quad (1)$$

dove $E(k) \sim WGN(0, \lambda)$ $\lambda = 0.3$ $a^* = 0.5$, $b^* = 2$ e $c^* = 0.2$

Scopo dell'esercitazione è utilizzare le tecniche di validazione viste nel corso identificare il miglior modello appartenente alle famiglie $ARX(2,1)$ e $ARX(1,2)$.

Lo studente

- Scriva uno script matlab che, forniti il segnale di ingresso $u = [u(1), \dots, u(N)]$, la realizzazione dell'errore $e = [e(1), \dots, e(N)]$, il vettore dei parametri $\theta = [a \ b \ c]^T$, e lo stato iniziale $x_0 = [y(0), u(0), e(0)]$ restituisca una simulazione dell'andamento dell'uscita del modello (1).
- Scriva uno script che, fornito in ingresso un vettore di dati $Z^N = (u; y)$, e lo stato iniziale $x_0^1 = [y(0), y(-1), u(0)]$, identifichi il seguente modello ARX di gradi $n_A = 2; n_B = 1$
 $y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + b u(t-1) + e(t)$ dove $e(t) \sim WGN(0, \lambda)$ (2)
- Scriva uno script che, fornito in ingresso un vettore di dati $Z^N = (u; y)$ e lo stato iniziale $x_0^2 = [y(0), u(0), u(-1)]$, identifichi il seguente modello ARX di gradi $n_A = 1; n_B = 2$
 $y(t) = a y(t-1) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$ dove $e(t) \sim WGN(0, \lambda)$ (3)
- Scriva uno script che, a fronte di un vettore di dati $Z^N = (u; y)$, fornisca le predizioni ottime¹ ad un passo per il seguente modello ARX di gradi $n_A = 2; n_B = 2$
 $y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$ dove $e(t) \sim WGN(0, \lambda)$
- Scriva uno script che, sfruttando le funzioni definite ai punti precedenti
 - Simuli il sistema (1) su di un orizzonte temporale di 200 istanti di campionamento a fronte di un ingresso continuo a tratti così definito
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \in [1, 30] \cup [101; 130] \\ 1 & t \in [31, 60] \cup [131; 160] \\ 2 & t \in [61, 100] \cup [161; 200] \end{cases}$$
 - Stimoli e validi i modelli (2) e (3) con il metodo della cross-validation dividendo i dati di partenza in due set di dati omogenei (aventi la stessa lunghezza).²
 - Stimoli e validi i modelli (2) e (3) utilizzando il test di bianchezza dei residui.

Comandi matlab utili

- **cdf**: calcola la densità cumulata di una funzione di densità di probabilità notevole. In altri termini restituisce $\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau$ dove $f(\tau)$ è la d.d.p. di una variabile casuale notevole

¹ Per realizzare il seguente punto lo studente si calcoli teoricamente il predittore ad un passo

² In una situazione reale si usa un solo dei due script. Infatti i test proposti, usano set di dati diversi, e quindi identificherebbero modelli diversi