Tutoraggio Analisi II

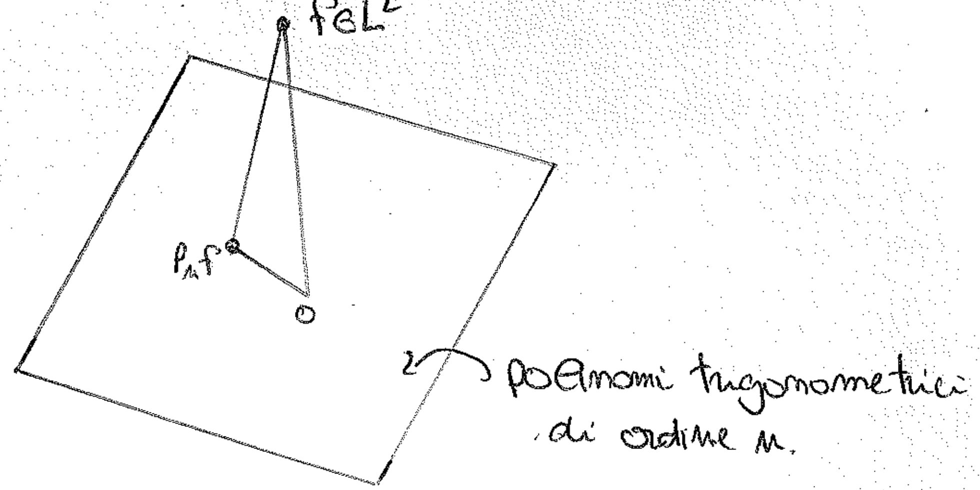
dott.ssa Scuncella

a.a. 2012/2013

Lezione del 29/11/2013

Data una funzione $f \in L^2(0, 2\pi) = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ integrabile tale che $\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt < \infty \}$ la vogliamo approssimare in norma L^2 $\left(\|g\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} g^2(t)\,dt \right)^{1/2} \right)$ con un polinomio trigonometrico di ordine n.

L'insieme P_n dei polinomi trigonometrici di ordine n è uno spazio vettoriale, infatti la somma di due polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico di ordine n, e il prodotto di una costante per un polinomio trigonometrico di ordine n è ancora un polinomio trigonometrico di ordine n.



P_n è uno spazio vettoriale di dimensione finita (un polinomio di ordine n dipende da al più $2n+1$ coefficienti). Cerchiamo una base ortonormale di questo spazio vettoriale (rispetto al prodotto scalare di L^2) dove

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2} = \int_0^{2\pi} g_1(t) \cdot g_2(t)\,dt.$$

Il polinomio trigonometrico che meglio approssima f in P_n è la proiezione ortogonale di f su P_n.

PROPOSIZIONE

Le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \qquad k=1,2,\dots$$

costituiscono un sistema ORTONORMALE nello spazio vettoriale L^2, cioè valgono le seguenti relazioni integrali (dette RELAZIONI DI ORTOGONALITÀ) per ogni $k, h = 1,2,3,\dots$

$$\int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 dx = \int_0^{2\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\sin(hx)\, dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(hx)\, dx = 0 \qquad \text{con } h \neq k$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cdot\cos(hx)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx = \int_0^{2\pi} \cos(hx)\, dx = 0$$

Procediamo ora con la costruzione della proiezione ortogonale di f su P_n. Quindi

$$P_n f = \sum_{i=0}^{2n} \langle f, e_i \rangle e_i = \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)\, dt \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\int_0^{2\pi} \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} f(t) dt \right) \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} f(t) dt \right) \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right].$$

Se si pone

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \qquad k = 0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \qquad k = 1,2,\dots$$

Si ottiene

$$P_n f = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

DEFINIZIONE

I coefficienti a_k e b_k appena definiti si dicono COEFFICIENTI di FOURIER di f. Il polinomio trigonometrico $P_n f$ si dice n-ESIMA SOMMA DI FOURIER di f e la serie trigonometrica

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

si dice SERIE DI FOURIER di f.

PROPOSIZIONE

Sia $f \in L^2$ e siano a_k e b_k i suoi coefficienti di Fourier. Allora

(i) $\| P_n f \|^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]$

(ii) $\| P_n f \| \leq \| f \|$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty$

(iv) per $k \to \infty$, $a_k \to 0$ e $b_k \to 0$

(v) $\int_0^{2\pi} [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]$

OSSERVAZIONE

Fino ad ora abbiamo considerato funzioni di periodo 2π. Nulla ci vieta di considerare un altro intervallo di periodicità. Per esempio se una funzione è definita su $[0, T]$, allora il sistema di funzioni trigonometriche con periodo (multiplo di T) è

$$1 , \quad \sin\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) , \quad \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

mentre i coefficienti di Fourier sono

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega k t)\,dt \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega k t)\,dt \qquad k=1,2,\dots$$

dove si è posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$

OSSERVAZIONE

Supponiamo che la funzione $f(x)$ che vogliamo sviluppare in serie di Fourier sia 2π-periodica e simmetrica.
Visto che anche le funzioni trigonometriche seno e coseno sono simmetriche, si semplifica il calcolo dei coeff. di Fourier.
Se f è dispari si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$$

Se f è pari si ha

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = 0$$

Al crescere di n si ha che la somma parziale $P_n f(x)$ della serie di Fourier approssima sempre meglio la funzione f.
Domanda: è vero che $P_n f \to f$ per $n \to \infty$?

CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER.

TEOREMA

Sia $f \in L^2$ e siano a_k, b_k i suoi coeff. di Fourier, sia inoltre $P_n f(x)$ l'ennesima somma di Fourier di f. Allora

$$\| f - P_n f \|_{L^2} \to 0 \quad \text{se} \quad n \to \infty$$

cioè per $n \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - P_n(x)]^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right] \to 0$$

Inoltre vale l'identità di PARSEVAL

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

CONVERGENZA PUNTUALE DELLE SERIE DI FOURIER.

TEOREMA

Sia $f: [0, T] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti, allora la serie di Fourier converge in ogni punto $x_0 \in (0,T)$ alla media dei due limiti destro e sinistro

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega k x_0) + b_k \sin(\omega k x_0)] = \frac{f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2}$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$; nei due estremi dell'intervallo invece la serie converge a $\frac{f(0^+) - f(T^-)}{2}$. In particolare: in ogni punto dove f è continua, la serie di Fourier converge a $f(x)$; negli estremi questo è vero solo se $f(0) = f(T)$.