PROVA PARZIALE DI ALGEBRA LINEARE

COMPITO A

Esercizio 1 (Punti 6)**.** Determinare la forma algebrica delle soluzioni della seguente equazione

$$z^2 + 2z(1-2i) - 3(1+2i) = 0.$$

Esercizio 2 (Punti 12)**.** Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = [5y - x + z \quad x - z - y \quad x - 2z]^T.$$

1. Scrivere la matrice A_f associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.
2. Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$.
3. f è un isomorfismo?
4. Determinare il polinomio caratteristico di A_f.
5. La matrice A_f associata a f è diagonalizzabile?
6. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_3, e_2 + e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e la base $\mathcal{B}$ sul codominio.

Esercizio 3 (Punti 8)**.** Si considerino il sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \; x - y + z = 0\}$$

e il sottospazio U generato da

$$\{\vec{u}_1 = [1 \quad -1 \quad 2]^T,\; \vec{u}_2 = [0 \quad 2 \quad -1]^T\}.$$

1. Determinare un insieme di generatori per V.
2. Dire se U e V sono in somma diretta.
3. Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$.
4. Scrivere la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (rispetto alla base canonica su dominio e codominio) che abbia V come immagine.

Esercizio 4 (Punti 4)**.** Sia V un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale e sia $\{\vec{u}\,, \vec{v}\}$ una base di V. Dimostrare che $\{\vec{u}\,, \vec{u} + \vec{v}\}$ è anch'essa una base di V.

Le risposte devono essere adeguatamente giustificate