

ESERCIZIO Consideriamo $f(10, 2, -3, 3)$. Calcolare il più piccolo numero macchina (normalizzato) positivo. Calcolare, inoltre, le precisioni di macchina.

Consideriamo l'equazione $f(x) = 0$.

$\bar{x} \in \mathbb{R}$ è radice o zero di f se $f(\bar{x}) = 0$.

Per calcolare le radici di f ci sono due passi:

1. **SEPARAZIONE** delle radici: trovare intervalli ognuno dei quali contiene una ed una sola radice.
2. **APPROSSIMAZIONE** di ciascuna delle radici.
L'approssimazione avviene costruendo una successione x_n che, sotto certe ipotesi, converge alla radice $\bar{x}$. Quindi, si tratta di metodi che necessitano di un **CRITERIO DI ARRESTO**. È questo un aspetto **NON BANALE**! Vedremo metodo per metodo dei criteri di arresto "ragionevoli".

Vediamo alcuni metodi di **APPROSSIMAZIONE**. Consideriamo

- metodo di **BISEZIONE** (o **DICOTOMICO**)
- metodo di **Newton** (o **Newton-Raphson**) e sue varianti
- metodo delle **secante**
- metodo di **punto fisso**.

METODO DI BISEZIONE

È un metodo che porta **SICURAMENTE** alla convergenza.
È questo il suo **più grande merito**.

Vediamo come lavora. Supponiamo che f sia
CONTINUA nell'intervallo $[a, b]$, che in $[a, b]$
 vi sia un' **unica** radice $\bar{x}$, che sia **$f(a) \cdot f(b) < 0$**

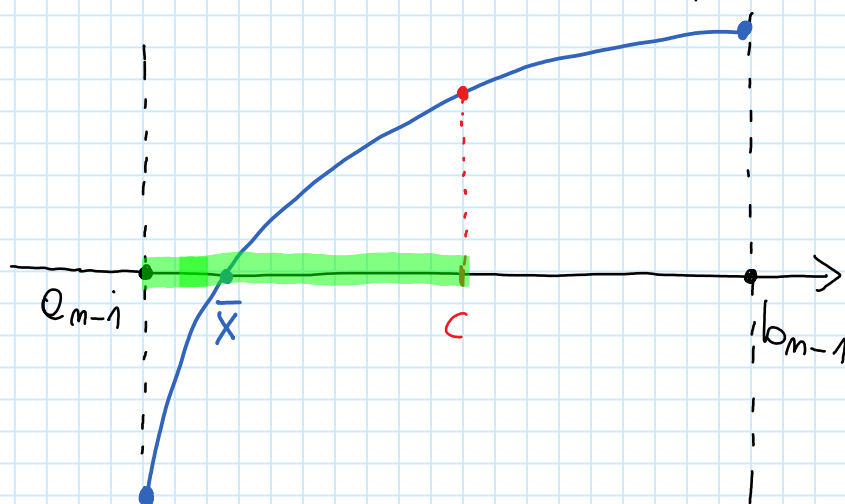
Il metodo di bisezione costruisce una successione
 di INTERVALLI I_m che soddisfano le relazioni

i) $I_m \subset I_{m-1}$, $m = 1, 2, 3, \dots$
 con $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$

ii) $|I_m| = b_m - a_m = \frac{1}{2} |I_{m-1}|$, $m = 1, 2, 3, \dots$
 ossia gli intervalli dimezzano di ampiezza ad
 ogni passo

iii) $\bar{x} \in I_m$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Vediamo come avviene un passo del metodo.



$$c = \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{2}$$

punto di mezzo di I_{m-1}

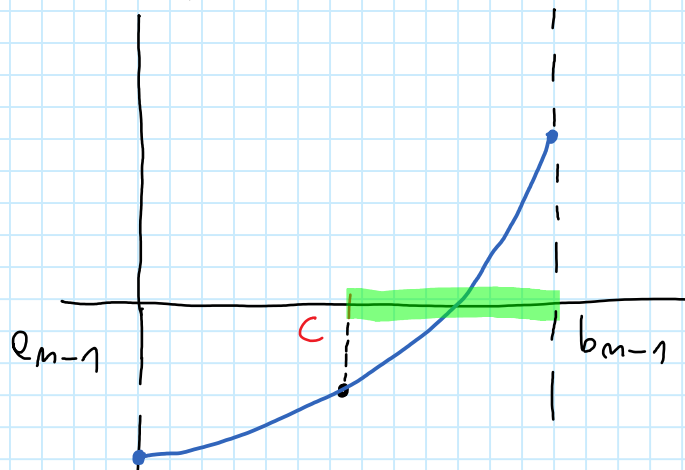
Detto $c = \frac{a_{m-1} + b_{m-1}}{2}$, per la radice $\bar{x}$ vi sono tre
 possibilità

1. $\bar{x} \in (a_{m-1}, c)$. Poniamo

$$I_m = [a_m, b_m] \text{ con } a_m = a_{m-1}, b_m = c.$$

2. $\bar{x} \in (c, b_{m-1})$. Poniamo

$$I_m = [a_m, b_m] \text{ con } a_m = c, b_m = b_{m-1}$$



3. $\bar{x} = c$. Il metodo fermine.

Vediamo come scegliere quale dei due intervalli prendere nei casi 1. o 2. L'idea è che per l'intervallo che contiene la radice è

$$f(c) \cdot f(a_{m-1}) < 0 \quad (\text{caso 1})$$

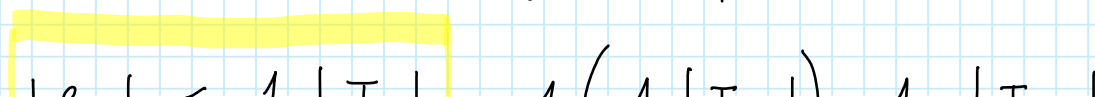
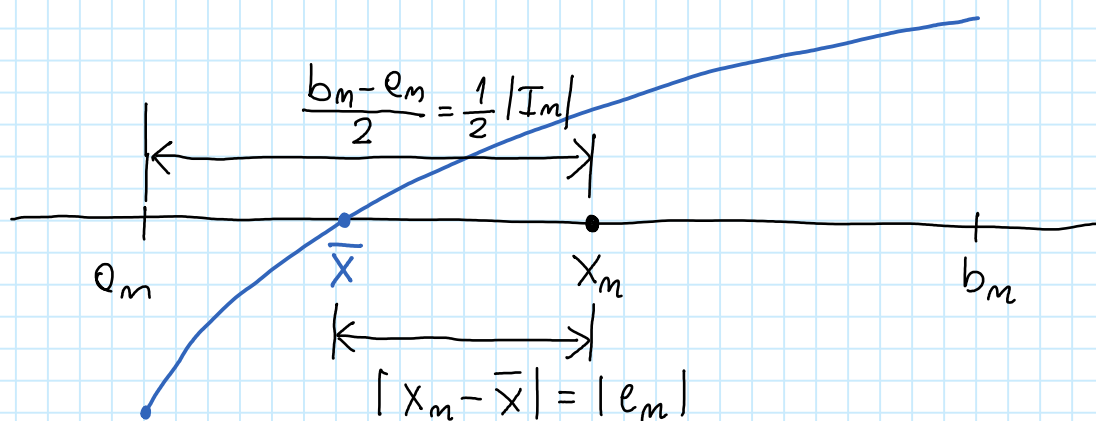
$$f(c) \cdot f(b_{m-1}) < 0 \quad (\text{caso 2}).$$

TEST DI ARRESTO ED ERRORE

L'errore al passo m è $e_m = \bar{x} - x_m$. Nel metodo di bisezione si prende

$$x_m = \frac{a_m + b_m}{2}$$

punto di mezzo dell'intervallo $[a_m, b_m]$. Poi si è



$$\begin{aligned}
 |e_m| &\leq \frac{1}{2} |I_m| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |I_{m-1}| \right) = \frac{1}{2^2} |I_{m-1}| = \\
 &= \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{1}{2} |I_{m-2}| \right) = \frac{1}{2^3} |I_{m-2}| = \dots = \\
 &= \frac{1}{2^{m+1}} \cdot |I_{m-m}| = \frac{1}{2^{m+1}} \cdot |I_0| = \frac{b-a}{2^{m+1}}
 \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo

$$|e_m| \leq \frac{b-a}{2^{m+1}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

In base a questa relazione, il TEST DI ARRESTO adottato è il seguente

$$b_m - a_m \leq \text{toll}, \quad \text{con toll numero piccolo assegnato.}$$

In questa situazione, l'errore commesso

$$|e_m| \leq \frac{\text{toll}}{2}.$$

Osservazione. Dalla equazione

$$|e_m| \leq \frac{b-a}{2^{m+1}}$$

è possibile trovare quante iterazioni è necessario fare affinché sia $|e_m| \leq \text{toll}$ con toll assegnato.
Basta imporre che sia

$$\frac{b-a}{2^{m+1}} \leq \text{toll}$$

||,

$$\Rightarrow |e_m| \leq \text{toll}$$

$$(b-a) \leq 2^{m+1} \cdot \text{toll}$$

$$2^{m+1} \geq \frac{b-a}{\text{toll}} \Rightarrow (m+1) \log_{10}(2) \geq \log_{10} \frac{b-a}{\text{toll}}$$

$$m \geq \frac{\log_{10} \left(\frac{b-a}{\text{toll}} \right)}{\log_{10}(2)} - 1.$$

Ad esempio, se $\bar{x} \in [0, 1]$ e $\text{toll} = 10^{-6}$ ho bisogno di

$$m \geq \frac{\log_{10} \left(\frac{1-0}{10^{-6}} \right)}{\log_{10}(2)} - 1 = \frac{6}{\log_{10}(2)} - 1$$

$= 18,93 \Rightarrow$ servono 19 iterazioni (ricordare che $m \in \mathbb{N}$).

OSSERVAZIONE Non è detto che $|e_m|$ decresca al crescere di m . Vediamo il perché con un esempio.

Sia $f(x) = 10x - 21$ che ha $\bar{x} = 21/10 = 2.1$.

Sia $a = 1$, $b = 3$.

$$a_0 = 1, b_0 = 3 \Rightarrow c = x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\Rightarrow |e_0| = |\bar{x} - x_0| = |2.1 - 2| = 0.1.$$

$$a_1 = 2, b_1 = 3 \Rightarrow c = x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$\Rightarrow |e_1| = |\bar{x} - x_1| = |2.1 - 2.5| = 0.4$$

ed è $|e_0| < |e_1|$.

OSSERVAZIONE CONCLUSIVA

Il metodo di bisezione garantisce sempre la convergenza.

È però più lento rispetto ad altri metodi che però NON garantiscono la convergenza e meno di NON bisezione.

molto vicini a $\bar{x}$.

L'idea è, perciò, quella di usare bisezione per trovare un intervallo "abbastanza piccolo" ($b-a \approx 1$ o $b-a = 0,1$) con poche iterazioni di bisezione e poi applicare un metodo più veloce a questo intervallo.

ORDINE DI CONVERGENZA DI UN METODO ITERATIVO

Un metodo può generare una successione x_n che converge più o meno rapidamente alla radice $\bar{x}$.

Possiamo quantificare questo aspetto con la definizione seguente.

DEF. Il metodo di approssimazione della radice $\bar{x}$ ha ordine di convergenza $p \geq 1$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = M, \quad M \neq 0$$

costante asintotica dell'errore

Nel caso in cui $p=1$ si dice che il metodo ha CONVERGENZA LINEARE (e deve essere, per avere convergenza, $M < 1$).

Nel caso $1 < p < 2$ si dice che il metodo ha CONVERGENZA PIÙ CHE LINEARE.

Nel caso $p=2$ si dice che il metodo ha CONVERGENZA QUADRATICA.

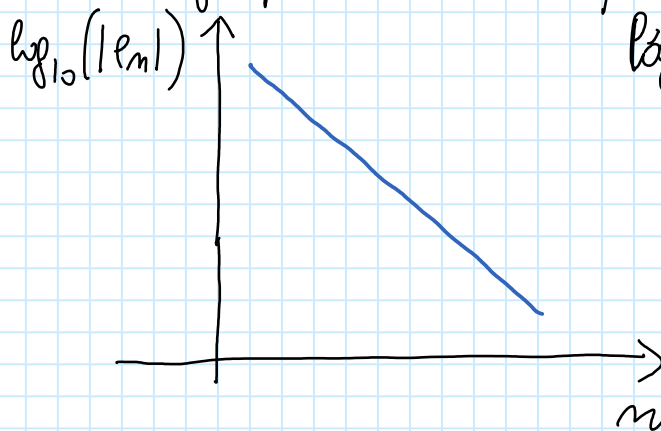
Il significato delle formule appare chiaro omettendo l'operazione di limite (ossia, assumendo n grande):

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} \approx M \Rightarrow |e_{n+1}| \approx M \cdot |e_n|^p$$

Sic, ad esempio, $M \approx 1$, $p=2$, $|e_n| = 10^{-6}$ (6 cifre decimali corrette!).

Allora, se eseguo un'ulteriore passo del metodo, ho
 $|e_{m+1}| \approx M \cdot |e_m|^2 = 1 \cdot (10^{-6})^2 = 10^{-12}$
 cioè ho il doppio delle cifre corrette !!

OSSERVAZIONE È consuetudine riportare l'andamento
 dell'errore $|e_m|$ in una scala
 semilogaritmica, ossia riportando $\log_{10}(|e_m|)$ in
 funzione di m . Si dimostra, almeno per m grandi,
 che i grafici hanno questo andamento qualitativo



convergenza lineare
 $(p=1)$



convergenza più che
 lineare $(p > 1)$

Vediamo le prove per il primo caso $(p=1)$. È, per m
 abbastanza grande,

$$\frac{|e_m|}{|e_{m-1}|} \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} M \Rightarrow |e_m| \approx M |e_{m-1}| = M \cdot (M \cdot |e_{m-2}|) =$$

$$= M^2 |e_{m-2}| = \dots = M^m |e_{m-m}|$$

$$= M^m |e_0|.$$

Allora è

$$|e_m| \approx M^m |e_0|.$$

Quindi è

$$\log_{10}(|e_m|) = \log_{10}(M^m \cdot |e_0|) =$$

$$\begin{aligned} \log_{10}(|e_n|) &= \log_{10}(M^n \cdot |e_0|) = \\ &= n \log_{10}(M) + \log_{10}(|e_0|) \end{aligned}$$

↪ pendenza della retta!

Se misuro la pendenza della retta di $\log_{10}$ l'errore, posso ricavare una stima di M .

Inoltre, dalla formula $|e_n| \approx M^n |e_0|$ possiamo dire che c'è sicuramente convergenza del metodo, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |e_n| = 0$$

se $M < 1$. Infatti è

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |e_n| = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n \right) \cdot |e_0| = 0 \cdot |e_0| = 0.$$