TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spera
a.a. 2011/12

Prova scritta del 6/2/2012

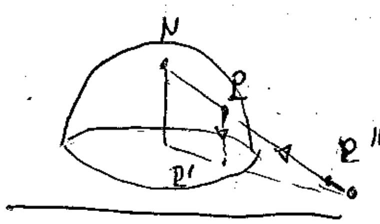
① In $(\mathbb{R}^2, dq \wedge dp)$, dimostrare che $X = \alpha \frac{\partial}{\partial q} + \beta \frac{\partial}{\partial p}$ $(\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R}^2))$ è simplettico $\Longleftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \beta}{\partial p} = 0)$

Dire se X è hamiltoniano.

Posto poi $\alpha = q$, $\beta = -p$, determinare un'Hamiltoniana di X

② Con rif. all'es. precedente, abbozzare il ritratto di fase di $X = q\frac{\partial}{\partial q} - p\frac{\partial}{\partial p}$, individuarne gli eventuali pti critici e calcolarne l'indice.

③ Dimostrare che gli atlanti su S^2 dati rispettivamente dalla "rosa dei venti" e dalla proiezione stereografica sono compatibili (è sufficiente analizzare il caso in figura)



$P' : (x, y)$

$P'' : (u, v)$

Posto $P' = f(P'')$

calcolare $f_*\big|_{(2,0)} \left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(2,0)} \right)$

[Sugg: si deve trovare $f: \begin{cases} x = \dfrac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \dfrac{2v}{1+u^2+v^2} \end{cases}$]

④ Su (S^2, ds^2) $ds^2 = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}(du^2+dv^2)$

posto $w = u\,dv - v\,du$, calcolare $X = \omega^\#$, det. l'indice di X in $O : (0,0)$ e l'indice totale.

⑤ Dire se $\tilde{X} := -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$ è di Killing relativamente a ds^2 (es. precedente)

Tempo a disposizione 1h. 15m   Le risposte vanno adeguatamente giustificate

1. In $(\mathbb{R}^2, dq \wedge dp)$, dimostrare che

$$X = \alpha \frac{\partial}{\partial q} + \beta \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{è simplettico} \iff$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \beta}{\partial p} = 0 \qquad \left(X \text{ è automaticamente hamiltoniano} \right) \atop H^2(\mathbb{R}^2) = 0$$

Posto poi $\alpha = q$, $\beta = -p$, trovare un'hamiltoniana di X

Sol. Si può procedere in vari modi

Ad esempio, $dq \wedge dp$ è la "forma di volume" su $\mathbb{R}^2$ e pertanto X è simplettico $\iff$ conserva $dq \wedge dp$

$\iff$ $\operatorname{div} X = 0$ (relativamente alla metrica standard)

dettagli: $\mathcal{L}_X(dq \wedge dp) = \mathcal{L}_X dq \wedge dp + dq \wedge \mathcal{L}_X dp$

$$= d(\mathcal{L}_X q) \wedge dp + dq \wedge d(\mathcal{L}_X p) =$$

$$= d\, X(q) \wedge dp + dq \wedge d\, X(p)$$

$$= d\alpha \wedge dp + dq \wedge d\beta =$$

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial q} dq \wedge dp + \frac{\partial \beta}{\partial p} dq \wedge dp$$

$$= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \beta}{\partial p} \right) dq \wedge dp = 0 \iff \boxed{\frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial \beta}{\partial p} = 0}$$

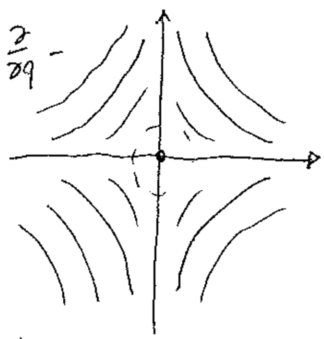
$$X = q\frac{\partial}{\partial q} - p\frac{\partial}{\partial p}$$

$$i_X \omega = dH$$

$$i_X \omega = (i_X dq)\wedge dp - dq \wedge (i_X dp)$$
$$= q\,dp - dq\,(-p)$$
$$= q\,dp + p\,dq = d(pq)$$

$$H = pq + c$$

$$V = X = q\frac{\partial}{\partial q} - p\frac{\partial}{\partial p}$$



(2) ritratto di fase

punti critici: $O : (0,0)$

indice $= -1$ $\qquad i_0(V) = -1$

Chiaro, ma per modi: posto ad ex: $q = \cos\varphi$ $\quad dq = -\sin\varphi\, d\varphi$
$p = \sin\varphi$ $\quad dp = \cos\varphi\, d\varphi$

$$i_0(V) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}$$

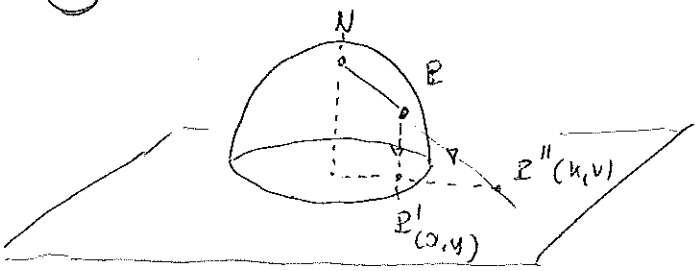
$X = \cos\varphi$
$Y = -\sin\varphi$

$dX = -\sin\varphi\, d\varphi$
$dY = -\cos\varphi\, d\varphi$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{-\cancel{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}}{\cancel{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= -1$$

③



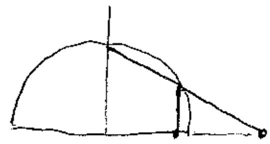
Dimostrare che gli atlanti su S^2 dati rispettivamente dalla "rosa dei venti" e dalla proiezione stereografica sono compatibili

(È suff. verificare ad esempio che si ha: $\begin{cases} x = \dfrac{2u}{1+u^2+v^2} \\ y = \dfrac{2v}{1+u^2+v^2} \end{cases}$

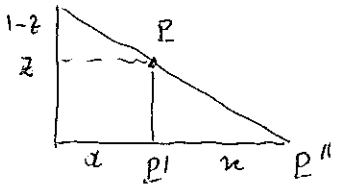
che è una mappa liscia ...

detta f la mappa sopra, calcolare

$$f_*\Big|_{(2,0)} \left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(2,0)} \right)$$



<u>Sol.</u>



Il cambiamento di carta si ottiene da semplici considerazioni geometriche elementari

esso è <u>liscio</u>

calcoliamo f_* : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{2(1+u^2+v^2) - 2u \cdot 2u}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{2(1-u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-2u \cdot 2v}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{-4uv}{(1+u^2+v^2)^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(1+u^2+v^2) - 2v \cdot 2v}{(1+u^2+v^2)^2} = \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$f_*\Big|_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{25} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(2,0) = \dfrac{4}{1+4} = \dfrac{4}{5} \\ y(2,0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}(2,0) = \frac{2(\overbrace{1-4}^{-3})}{(1+4)^2} = \frac{-6}{25} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}(2,0) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(2,0) = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial v}(2,0) = \frac{2(1+4)}{(1+4)^2} = \frac{2\cdot 5}{5^2} = \frac{2}{5}$$

$$f_*\Big|_{(2,0)}\left(\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(2,0)}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{25} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\frac{6}{25}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(\frac{4}{5},0)}$$

(4) Su (S^2, ds^2) $\quad ds^2 = \underbrace{\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}}_{\lambda} (du^2+dv^2)$

Posto $\quad \omega = u\,dv - v\,du$

calcolare $X = \omega^{\#}$ e det. l'indice attorno a $O=(0,0)$ (polo sud)
e l'indice totale

$$X = g^{ij}\omega_j \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4} \end{pmatrix}}^{=\lambda^{-1}} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{v}{\lambda} \\ \frac{u}{\lambda} \end{pmatrix} \implies X = -\frac{v}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{u}{\lambda}\frac{\partial}{\partial v}$$

$\mathrm{ind}_O X = +1$ $\quad$ (la var. angolare è la stessa di $X_1 = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$ ...)

$\mathrm{ind}(X) = +2$
(Poincaré - Hopf)

(5) Dire se $X = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$

è di Killing relativamente a $g = ds^2 = \lambda(du^2+dv^2)$

$\left(\lambda = \frac{4}{(1+u^2+v^2)}\right)$

$$X = \underbrace{-v\frac{\partial}{\partial u}}_{X_1} + \underbrace{u\frac{\partial}{\partial v}}_{X_2}$$

$$\mathcal{L}_{X_1} g = \mathcal{L}_{X_1}(\lambda)(du^2+dv^2) + \lambda\mathcal{L}_{X_1}(du^2) + \lambda\mathcal{L}_{X_1}(dv^2)$$

$$\mathcal{L}_{X_1}(\lambda) = -v\frac{\partial\lambda}{\partial u}$$

$$\mathcal{L}_{X_1} du^2 = (\mathcal{L}_{X_1} du)du + du(\mathcal{L}_{X_1} du)$$

$$\mathcal{L}_{X_1} du = d\mathcal{L}_{X_1}u = d\Big(-v\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial u}{\partial u}}}\Big) = -dv$$

$$\mathcal{L}_{X_1} dv = d\mathcal{L}_{X_1}v = d\Big(-v\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial v}{\partial u}}}\Big) = 0$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{X_1} g = -v\frac{\partial\lambda}{\partial u}(du^2+dv^2) - 2du\,dv}$$

$\mathcal{L}_{X_2} g = \dots$ analoga

$$\mathcal{L}_{X_2}(\lambda) = u\frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

$$\mathcal{L}_{X_2} du = d\Big(u\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial u}{\partial v}}}\Big) = 0$$

$$\mathcal{L}_{X_2} dv = d\Big(u\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\frac{\partial v}{\partial v}}}\Big) = du$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{X_2} g = u \frac{\partial\lambda}{\partial v}(du^2+dv^2) + 2\,du\,dv}$$

$$\mathcal{L}_X g = \underbrace{\left(u\frac{\partial\lambda}{\partial v} - v\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)}_{\xi}(du^2+dv^2)$$

$$\lambda = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = 4\,\frac{-2(1+u^2+v^2)\cdot 2v}{(1+u^2+v^2)^4}$$

$$= -16\,\frac{v}{(1+u^2+v^2)^3} = -4\cdot\lambda v\cdot\frac{1}{1+u^2+v^2}$$

$$\boxed{u\frac{\partial\lambda}{\partial v} = -\frac{4\lambda uv}{1+u^2+v^2}}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u} = 4\,\frac{-2(1+u^2+v^2)\cdot 2u}{(1+u^2+v^2)^4} = \frac{-16u}{(1+u^2+v^2)^4} = \frac{-4\lambda u}{1+u^2+v^2}$$

$$\boxed{-v\frac{\partial\lambda}{\partial u} = \frac{4\lambda uv}{1+u^2+v^2}}$$

$\Rightarrow \quad \xi = 0$ int. geometrica (X genera le rot. attorno all'asse z)

$$\boxed{X \text{ è di Killing}}$$