Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 5
4 novembre 2014

1. Sia $\tilde{R} = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + i\sqrt{5}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Si verifichi:
   (a) $\tilde{R}$ è un sottoanello di $\mathbb{C}$.
   (b) Gli elementi 2 , 3 , $1 + i\sqrt{5}$, $1 - i\sqrt{5}$ sono elementi irriducibili di $\tilde{R}$.
   (c) L'anello $\tilde{R}$ non è un dominio a fattorizzazione unica (UFD), cioè in $\tilde{R}$ *non* vale l'enunciato del Teorema 8.10.
   (d) L'ideale (2) non è un ideale primo di $\tilde{R}$.

(*6 punti*)

2. Sia R un anello commutativo e I un suo ideale. Sia $\nu : R \to R/I$ l'epimorfismo canonico.
   (a) Si dimostri che N è un ideale di R/I se e solo se $N = \nu(J)$, dove J è un ideale di R contenente I.
   (b) Si dimostri che se R è un dominio a ideali principali, allora ogni ideale di R/I è principale.
   (c) Sia $F = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $f = x^4 + 3 \in F[x]$, e $A = F[x]/(f)$. Si trovino tutti gli ideali di A.
   (d) Quali sono gli ideali di A che contengono $x^3 - 2x + (f)$?

(*8 punti*)

3. (a) Sia R un anello commutativo e siano I, J ideali di R. Si verifichi che

$$(I : J) = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

   è un ideale di R.
   (b) Sia $R = \mathbb{Q}[x]$ si considerino i polinomi

$$f(x) = x^4 - 1 \qquad g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

   Si determinino un elemento generatore per l'ideale (f, g), un elemento generatore per l'ideale $(f) \cap (g)$, e un elemento generatore per l'ideale $((f) : (g))$

(*8 punti*)

4. Sia $A = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Si verifichi che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}[x]$
   (b) Sia $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$, $n \neq -1$. Si provi che l'ideale (x) è propriamente contenuto nell'ideale $(\frac{1}{n}x)$.
   (c) Si costruisca in A una catena ascendente e non stazionaria di ideali principali.
   (d) Si dimostri che A non è un dominio a ideali principali.

(*8 punti*)

5. Si A come nel precedere esercizio.

   (a) Si verifichi che ogni intero primo $p \in \mathbb{Z}$ è un elemento irriducibile in A.

   (b) L'anello A è un dominio a fattorizzazione unica (UFD)? (**)

Consegna: martedì 11 novembre