lunedì 14 marzo 2016 08:35

OPERATORI PUNTO IN MATLAB/OCTAVE

Permettono di fare le operazioni elemento a elemento nelle matrici. Sono, sostanzialmente, i seguenti

- .* (punto *)
- ./
- .^

ESEMPIO

$$\left.\begin{array}{l} a = [1 \ 2 \ 3] \\ b = [4 \ 5 \ 6] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a.*b = [1*4 \quad 2*5 \quad 3*6] \\ a./b = [1/4 \quad 2/5 \quad 3/6] \\ a.^\wedge b = [1^4 \quad 2^5 \quad 3^6] \end{array}$$

N.B. a e b DEVONO avere le stesse dimensioni!

ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A.*B = \begin{bmatrix} 1*0 & 2*(-1) \\ 3*(-2) & 4*3 \end{bmatrix} \; ; \quad A.\wedge B = \begin{bmatrix} 1^{0} & 2^{-1} \\ 3^{-2} & 4^{3} \end{bmatrix}$$

OPERATORE : PER DEFINIRE VETTORI

v = inizio : passo : fine

crea il vettore così fatto

[inizio inizio+passo inizio+2passo .... inizio + k passo]

con k tale che

$$\boxed{\text{inizio} + k * \text{passo} \leq \text{fine}}$$

lunedì 14 marzo 2016 08:35

ESEMPIO

$v = 0 : 2 : 5$

$= [0 \quad 0+2 \quad 2+2] \quad \cancel{\underbrace{4+2}_{>5}}$

$= [0 \quad 2 \quad 4]$

$w = 0 : 2 : 6$

$= [0 \quad 0+2 \quad 2+2 \quad 2+2+2]$

$= [0 \quad 2 \quad 4 \quad 6]$

N.B. Scrivendo inizio : fine assumo passo = 1.

N.B. Il passo può essere negativo:

$u = 6 : -2 : 1$

$= [6 \quad 6+(-2) \quad 6+(-2)+(-2)] \quad \cancel{6+(-2)+(-2)+(-2)}$

$= [6 \quad 4 \quad 2]$

N.B. Il vettore creato può essere vuoto

$t = 7 : 2 : 6 = [\,]$

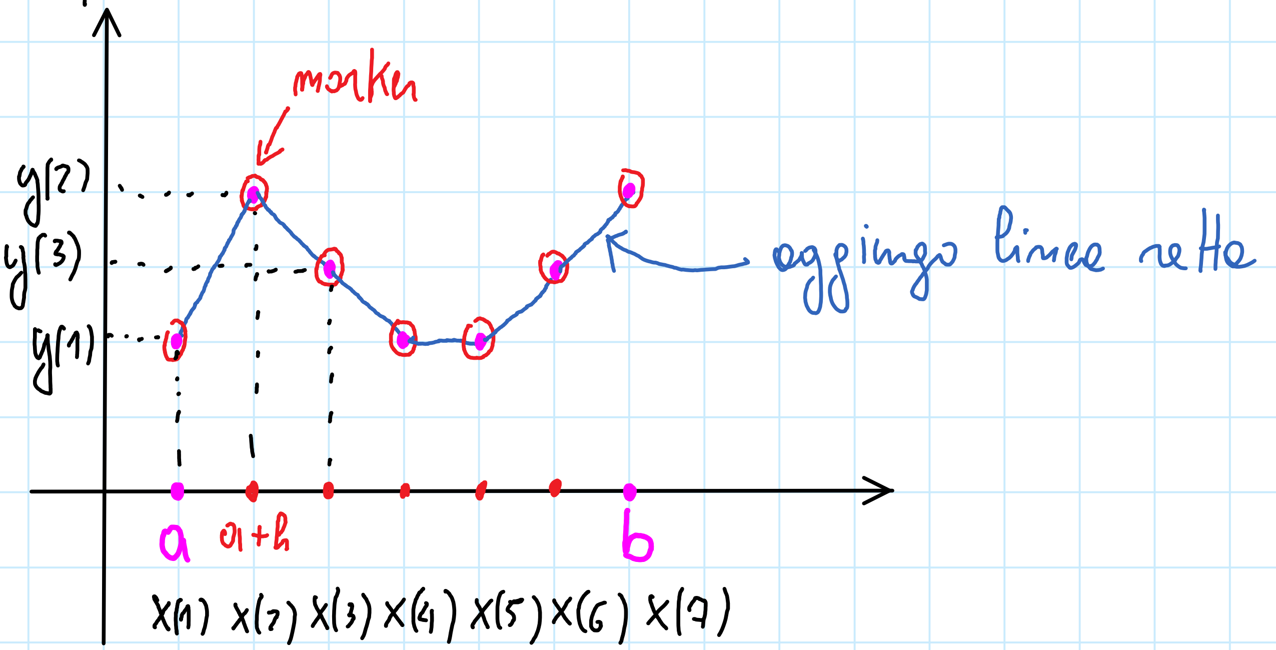
GRAFICI IN MATLAB/OCTAVE

Voglio il grafico di $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

In Matlab vengono creati due vettori:

x = a : h : b ; % vettore ascisse

y = f(x) ; % vettore delle ordinate



La funzione da usare è

plot(x, y, 'o-b', 'LineWidth', 2)

marker · tipo linea · colore linea · spessore linea

opzionali

lunedì 14 marzo 2016 08:35

ESEMPIO Grafico di

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \quad \text{in } [-1, 0.5]$$

x = -1:0.01:0.5; % vettore ascisse

y = (x.^2+1)./(x-1); % vettore ordinate

plot(x, y, 'g')

colore verde, tratto continuo, nessun marker

```
>> x=-1:0.01:0.5;
>> y=(x.^2+1)./(x-1);
>> plot(x,y,'g')
```

Vediamo all'opera (x.^2+1)./(x-1)

con $x = [-2 \;\; -1 \;\; 0]$

$x.\wedge 2 = [(-2)^2 \;\; (-1)^2 \;\; 0^2]$

$x.\wedge 2+1 = [(-2)^2+1 \;\; (-1)^2+1 \;\; 0^2+1]$

$x-1 = [-2-1 \;\; -1-1 \;\; 0-1]$

$$(x.\wedge 2+1)./(x-1) = \left[\underbrace{\frac{(-2)^2+1}{-2-1}}_{=f(-2)} \;\; \underbrace{\frac{(-1)^2+1}{-1-1}}_{=f(-1)} \;\; \underbrace{\frac{0^2+1}{0-1}}_{=f(0)} \right]$$

OPERAZIONI DI MACCHINA

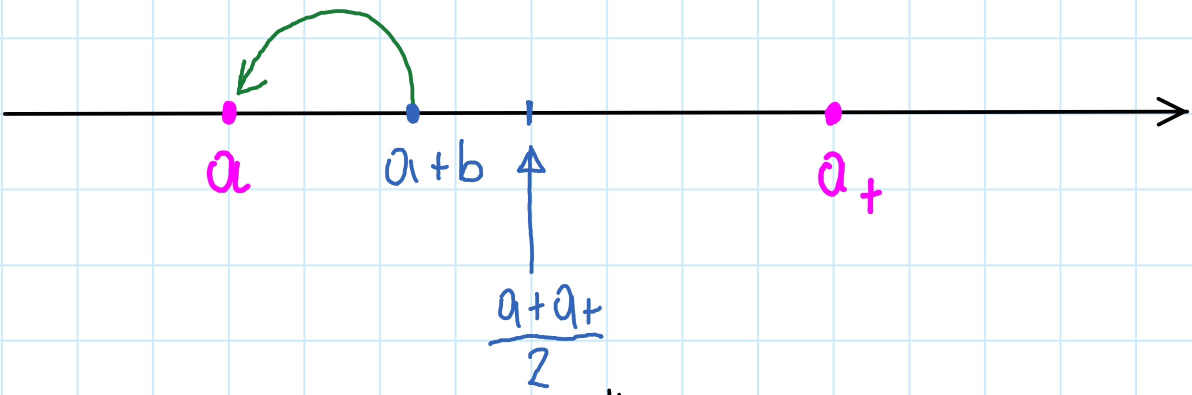
Siano $x, y \in \mathbb{F}(\beta, t, L, U)$. Allora, in generale, le operazioni di macchina $x \oplus y$, $x \ominus y$, $x \circledast y$, $x \oslash y$ introducono un errore rispetto alle corrispondenti operazioni in $\mathbb{R}$ $x+y$, $x-y$, $x*y$, x/y perché, questi ultimi non è detto che siano numeri di macchina.

Questo fatto fa sì che molte delle operazioni dell'algebra classica non siano più vere in $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$.

Limitiamoci a vedere qualche esempio.

ESEMPIO

Siano $a, b \in \mathbb{F}(\beta, t, L, U)$. In $\mathbb{R}$, se $b > 0$, è sicuramente vero che $a + b > a$. Questo NON è più vero in $\mathbb{F}$!



Se b è "troppo piccolo" rispetto ad a, allora $a+b=a$ in $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$.

N.B. Se $b \ll a$, l'errore relativo è piccolo anche se l'operazione $a+b$ è completamente sbagliata (perché ho "perso" b!!).

ESEMPIO Consideriamo la somma di

$x = 0.4$, $y = 0.5$, $z = 0.9$ di $\mathbb{F}(10, 1, -1, 1)$.

eseguita nei due modi seguenti

(a) $(x \oplus y) \oplus z$ (b) $x \oplus (y \oplus z)$

(a) $(x \oplus y) \oplus z = fl(fl(x+y) + z) =$

$= fl(fl(0.4+0.5) + 0.9) =$

$= fl(fl(0.9) + 0.9)$ $\quad 0.9 \in \mathbb{F}(10,1,-1,1)$

$= fl(0.9 + 0.9)$

$= fl(1.8)$ $\quad 1.8 \notin \mathbb{F}(10,1,-1,1)$

$= 2$

Notiamo che $x+y+z = 1.8$ (somma in $\mathbb{R}$) e che quindi il valore dato da $(x \oplus y) \oplus z$ è la miglior rappresentazione possibile di $x+y+z$ in $\mathbb{F}(10,1,-1,1)$.

(b) $x \oplus (y \oplus z) = fl(x + fl(y+z)) =$

$$= fl(0.4 + fl(0.5 + 0.9)) =$$

$$= fl(0.4 + fl(1.4))$$

$1.4 \notin \mathbb{F}(10, 1, -1, 1)$

$$= fl(0.4 + 1)$$

$$= fl(1.4)$$

$$= 1$$

Pertanto:

→ $(x \oplus y) \oplus z$ può essere diverso da $x \oplus (y \oplus z)$!!

→ Sono risultati parecchio DIVERSI tra loro !!

OSS. Osserviamo che la prima somma è più accurata della seconda. Questo accade perché abbiamo sommato per primi i termini più piccoli.

È questo un fatto che vale la pena di ricordare: nel fare una somma è bene partire dai termini più piccoli!

Problemi si manifestano anche quando sommiamo numeri di segno opposto e di valore assoluto circa uguale (cancellazione di cifre significative).

ESEMPIO Sia da valutare per $x = 8$ la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x \quad \text{in } \mathbb{F}(10, 2, -2, 2).$$

Assumiamo che $\sqrt{a}$ sia valutata in $\mathbb{F}$ come le altre operazioni: $\sqrt{a} = fl(\sqrt{a})$

in $\mathbb{F}$

In $\mathbb{R}$ è $f(8) = 0.062258$. Vediamo in $\mathbb{F}$. È

$$\sqrt{8^2 \oplus 1} = \sqrt{64 \oplus 1} = \sqrt{65} = fl(\sqrt{65})$$

$$= fl(8.0622\ldots) = 8.1$$
$$\notin \mathbb{F}(10,2,-2,2)$$

Quindi

$$\sqrt{8^2 \oplus 1} \ominus 8 = 8.1 \ominus 8 = fl(8.1-8) =$$
$$= fl(0.1) = 0.1$$
$$\in \mathbb{F}(10,2,-2,2)$$

C'è un errore relativo dato da

$$\left| \frac{0.062258 - 0.1}{0.062258} \right| \cong 0.6 = 60\%$$

È possibile migliorare il risultato in $\mathbb{F}(10,2,-2,2)$!!

Riscrivo la formula in altro modo:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

In $\mathbb{F}(10,2,-2,2)$ il denominatore vale

lunedì 14 marzo 2016 08:35

$$\sqrt{8^2 \oplus 1} \oplus 8 = 8.1 \oplus 8 = fl(16.1) = 16.$$

per cui $\left(1 \oslash \left(\sqrt{8^2 \oplus 1} \oplus 8\right)\right)$

$$1 \oslash 16 = fl(1/16) = fl(0.0625) = 0.063$$

$\notin \mathbb{F}(10,2,-2,2)$

Con un errore relativo

$$\left| \frac{0.06228 - 0.063}{0.06228} \right| = 0.015 \approx 2\%$$

Riassumendo

(1) In aritmetica di macchina commetto sempre errori!

(2) Questi errori dipendono anche da come è scritta la formula (o l'algoritmo, in generale).
Ci sono formule matematicamente equivalenti, che si comportano meglio di altre nei calcoli in $\mathbb{F}$.

DEF. Una formula o algoritmo si dice STABILE se NON AMPLIFICA TROPPO gli errori che vengono commessi nei conti. Si dice instabile in caso contrario.

Quindi, $x \oplus (y \oplus z)$ è stabile (nel caso precedente) e $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ pure.

Altri problemi nelle aritmetica di macchina si hanno con over e under flow.

ESEMPIO Consideriamo in $\mathbb{F}(10, 6, -2, 2)$ $x = 90$ e $y = 10$. Valutare la formula $\sqrt{x^2+y^2}$ e $|x|\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ per il calcolo di $(x^2+y^2)^{1/2}$.

La formula $\sqrt{90^2 \oplus 10^2}$ dà un overflow

perché $90^2 = 8100 > X_{max}$.

Consideriamo la seconda:

$$|90| \circledast \sqrt{1 \oplus (10 \oslash 90)^2} = 90.5535$$

e non c'è più overflow.

ESEMPIO

Vogliamo calcolare gli integrali

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n \cdot e^x \, dx \, , \quad n = 0, 1, \dots, \bar{n} \in \mathbb{N}$$

Vediamo l'analisi teorica.

(i) $I_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 \underbrace{x^0}_{=1} \cdot e^x \, dx = \frac{1}{e} \left[e^x \right]_0^1 = \frac{e^1 - e^0}{e} = 1 - \frac{1}{e}$.

(ii) Dato che $x^n e^x \geq 0$ in $[0, 1]$ è $I_n > 0$.

Inoltre abbiamo la maggiorazione

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n \underbrace{\overbrace{e^x}^{\leq e^1 = e}}_{\geq e^0 = 1} dx < \frac{1}{\cancel{e}}\int_0^1 x^n \cdot \cancel{e}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

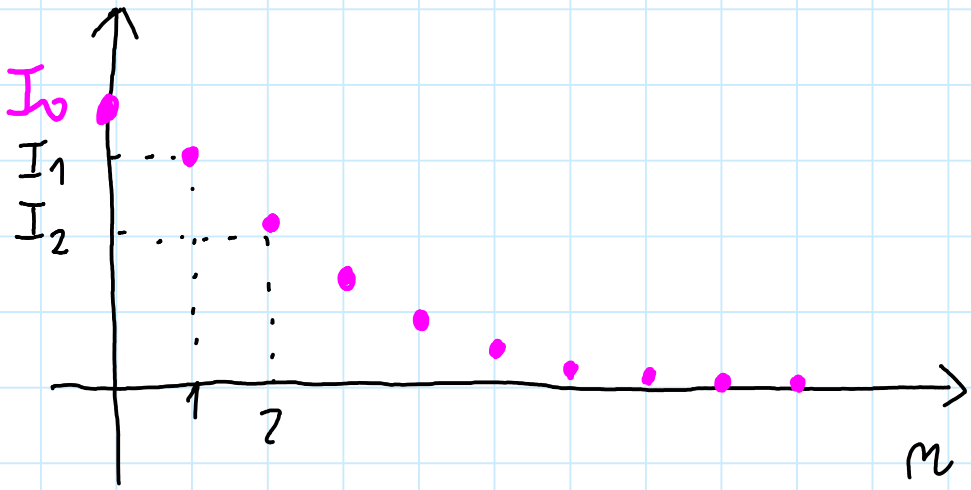
Allora è $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (teorema confronto).

(iii) Inoltre è

$$I_{n+1} = \frac{1}{e}\int_0^1 \underbrace{\overbrace{x^{n+1}}^{\leq x^n}}_{\geq 0} \cdot e^x dx < \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx = I_n$$

lunedì 14 marzo 2016 08:35

Allora la successione I_n è



Per calcolare I_n uso una formula ricorsiva che lega I_n e I_{n-1} :

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x \, dx = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n (e^x)' \, dx \overset{\text{per parti}}{=}$$

$$= \frac{1}{e}\left\{ \left[x^n e^x\right]_0^1 - \int_0^1 n\, x^{n-1} e^x \, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{e}\left\{ 1^n \cdot e^1 - \cancel{0^n \cdot e^0} - n\int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx \right\} =$$

$$= 1 - n \cdot \frac{1}{e}\int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx = 1 - n\, I_{n-1}$$

lunedì 14 marzo 2016 08:35

Ho la relazione ricorsiva

$$\begin{cases} I_0 = 1 - \frac{1}{e} \\ I_n = 1 - n\, I_{n-1} \,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \bar{n} \end{cases}$$

È vera in $\mathbb{R}$. E in $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$?

Supponiamo che ci sia solo l'errore iniziale:

$\hat{I}_0 = I_0(1+\epsilon)$, $\epsilon \neq 0$ (perché $1 + \frac{1}{e} \notin \mathbb{Q}$!!)

dove $\hat{I}_0$ è la rappresentazione di macchina di I_0.

Vediamo come si comporta la relazione ricorsiva rispetto a questo errore iniziale.

$$\hat{I}_1 = 1 - 1 \cdot \hat{I}_0 = 1 - I_0(1+\epsilon) = \underbrace{1 - I_0} - \epsilon I_0 =$$

$$= I_1 - \epsilon I_0$$

$$\hat{I}_2 = 1 - 2 \cdot \hat{I}_1 = 1 - 2(I_1 - \epsilon I_0) = (1 - 2I_1) + 2\epsilon I_0$$

lunedì 14 marzo 2016 08:35

$$\hat{I}_2 = 1 - 2 \cdot \hat{I}_1 = 1 - 2(I_1 - \epsilon I_0) = (1 - 2I_1) + 2\epsilon I_0$$

$$= I_2 + 2\epsilon I_0$$

$$\hat{I}_3 = 1 - 3\hat{I}_2 = 1 - 3(I_2 + 2\epsilon I_0) = 1 - 3I_2 - 3 \cdot 2 \cdot \epsilon I_0$$

$$= I_3 - 3 \cdot 2 \cdot \epsilon I_0$$

$$\hat{I}_4 = 1 - 4\hat{I}_3 = 1 - 4(I_3 - 3 \cdot 2 \cdot \epsilon I_0) = 1 - 4I_3 +$$

$$+ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \epsilon I_0 = I_4 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \epsilon I_0$$

$$\vdots$$

$$\hat{I}_n = I_n + \underbrace{(-1)^n n! \epsilon I_0}$$

l'errore cresce con $n!$
per cui sovrasta I_n
anche per n modesti!

La formula è INSTABILE e
non può essere usata per calcolare
$I_n, \; n = 0, 1, \ldots, \bar{n}$.