Dinamica di sistemi di punti materiali: derivazione delle leggi cardinali della dinamica dei sistemi di particelle nel sistema L.

Obiettivo: l'estensione delle leggi e dei principi della Dinamica del punto materiale ai sistemi di particelle.

Abbiamo visto che per il punto materiale:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad dE_{k,} = dW = \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \qquad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_R$$

Generalizzazione dei risultati relativi alla dinamica di una particella ai sistemi con un numero finito N di punti in termini delle <u>grandezze dinamiche collettive</u> del sistema di particelle.

Sistema discreto: $S = \{ m_i, i = 1 \dots N\}$

Sistema continuo: $S=\int_M dm=\int_V \rho(r)dV$, essendo $\rho(r)=dm/dV$

Massa totale del sistema di particelle $M_S = \sum_1^N{}_i m_i$, $M_S = \int_M dm$

Grandezze dinamiche collettive = grandezze riferite a tutto S:

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i (m_i \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i E_{k,i} = \sum_1^N{}_i \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{Ps}/dt = ?$$

$$dE_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_O/dt = ?$$

Per capire cosa succede per il sistema S partiamo dall'equazione del moto della particella i-ma appartenente al sistema di P.M..

Equazione del moto della particella i–ma (*legge di Newton*):

$$m_i\mathbf{a}_i = \sum_1{}^T{}_i\, \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i{}^{(R)} \qquad (1)$$

Scriviamo la forza risultante $\mathbf{F}_i{}^{(R)}$ agente sulla particella i–ma come la risultante delle forze interne $\mathbf{F}_i{}^{(I)}$ e delle forze esterne $\mathbf{F}_i{}^{(E)}$.

Cosa si intende per Forza interna e Forza esterna?

Forze esterne e forze interne: $\mathbf{F}_i{}^{(R)} = \mathbf{F}_i{}^{(I)} + \mathbf{F}_i{}^{(E)}$,

$$\mathbf{F}_i{}^{(I)} = \sum_1{}^N{}_j\, \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\,\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i{}^{(E)} = \sum_1{}^R{}_k\, \mathbf{F}^{(e)}{}_{ik} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ik} = -\,\mathbf{F}_{ki},]$$

Vale il principio di azione/reazione, per cui per ogni coppia di particelle appartenenti al sistema si avrà $\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = -\,\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji}$.

In generale, l'equazione del moto della singola particella i–ma è un'equazione differenziale funzione di (Nr_i+Nv_i+t).

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i{}^{(R)} = \mathbf{F}_i{}^{(E)} + \mathbf{F}i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

E quindi per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in 6N+1 incognite $(N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t)$.

Impossibilità di risolvere sistemi di 3N equazioni di Newton in 6N+1 incognite ($N\mathbf{r}_i$+$N\mathbf{v}_i$+t). Il problema è senza soluzione perché indeterminato. Solo in alcuni casi particolari si sa risolvere analiticamente: ad esempio nel caso di un sistema di 2 P.M..

Cosa si può fare con i sistemi di punti materiali?

Cosa si sa fare con i sistemi di punti materiali?

Descrizione del moto attraverso la definizione di grandezze dinamiche collettive sopra definite.

In tale modo si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che delle singole particelle che lo formano.

Grandezze collettive = grandezze dinamiche riferite a tutto S:

$$\mathbf{F}_S^{(R)}=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{F}_i^{(R)}=\sum_1^N{}_i\,[\mathbf{F}_i^{(I)}+\mathbf{F}_i^{(E)}]=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{F}_i^{(I)}+\sum_1^N{}_i\,\mathbf{F}_i^{(E)}=\mathbf{F}^{(INT)}+\mathbf{F}^{(EXT)}$$

$$\mathbf{P}_S=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{p}_i=\sum_1^N{}_i\,(m_i\,\mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S}=\sum_1^N{}_i\,E_{k,i}=\sum_1^N{}_i\,\tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S}=\sum_1^N{}_i\,L_{O,i}=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{r}_i\wedge\mathbf{p}_i$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di calcolare e dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{P}s/dt = ?$$

$$dE_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = ?$$

Calcolo della risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sul sistema S, a partire dall'equazione del moto (1):

Partendo dalla: $m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}$ (1),

sommando sulle N–particelle del sistema si ottiene:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] =$$

$$= \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Ma a causa del principio di azione–reazione ($\mathbf{F}^{(i)}_{ij} = -\,\mathbf{F}^{(i)}_{ji}$) si avrà che $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$. Infatti: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\, [\sum_1^N{}_j\, \mathbf{F}^{(i)}_{ij}] = \sum_1^N{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}^{(i)}_{ij} = 0$.

In conclusione sarà:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} \qquad (2)$$

Per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = -\,\mathbf{F}_{12}$ si ha infatti:

$$\sum_1^2{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (-\,\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = -\,\mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:

$$\sum_1^3{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (-\,\mathbf{F}_{12}) + \mathbf{F}_{23} + (-\,\mathbf{F}_{13}) + (-\,F_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}.$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

In definitiva la risultante di tutte le forze agenti sul sistema:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

La risultante delle forse esterne che agiscono su un sistema di particelle è formalmente identica ($\mathbf{F}_S^{(R)}$) alla risultante di un sistema di forze agenti su una particella, per cui vale la legge di Newton. E' pensabile di trattare il sistema S come una super particella per cui si possa scrivere l'equivalente della II legge della dinamica che abbiamo derivato per il punto materiale ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)?

Per la massa del sistema non c'è problema: $M_S = \sum_1^N{}_i\, m_i$ (3)

Per l'accelerazione a bisogna fare riferimento alla media pesata o media ponderata $\mathbf{a}_S$ delle accelerazioni delle singole particelle.

Cosa significa accelerazione media ponderata? E' il valor medio delle accelerazioni di tutte le particelle pesate per la loro massa.

E come media ponderata si ottiene così: $\mathbf{a}_S = \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$

ossia: $\mathbf{a}_S = \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i / M_S$

Per cui l'eq. (2): $\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)}$ si potrà scrivere anche come:

$$M_S\, \mathbf{a}_S = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Dato che $\mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$.

Vedremo fra un po' che $\mathbf{a}_S$ è di fatto l'accelerazione del centro di massa del sistema di punti materiali o sistema di particelle S.

Centro di massa di un sistema di particelle.

Definizione e proprietà: Vettore posizione del CM

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$$

In termini delle coordinate cartesiane: $\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\,\mathbf{i} + y_{CM}\,\mathbf{j} + z_{CM}\,\mathbf{k}$

$(x_{CM} = \sum_i m_i\, x_i/\sum_i m_i,\ y_{CM} = \sum_i m_i\, y_i/\sum_i m_i,\ z_{CM} = \sum_i m_i\, z_i/\sum_i m_i)$

In pratica: $M_S\, \mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i$, e $M_S\, x_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\, x_i$, etc. etc.

N.B.: Il CM è una proprietà intrinseca del sistema e coincide con il suo baricentro. La sua posizione quindi è indipendente da Oxyz, mentre le sue coordinate dipendono dalla scelta del sistema Oxyz.

Calcolo del CM di due particelle a distanza *d* l'uno dall'altra:

Sistema $O'x'$ tale che m_1 si trovi in O' e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1\, 0 + m_2\, d] / [m_1 + m_2] = m_2\, d/[m_1 + m_2]$$

Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1 x_1 + m_2 x_2] / [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1 x_1 + m_2 (x_1 + d)] / [m_1 + m_2] \\ &= x_1 + m_2\, d/(m_1+m_2) \\ &= x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_{CM}$

<u>Proprietà distributiva del CM:</u>

Centro di massa di due sistemi di punti materiali S e S′

Il centro di massa di due sistemi di particelle $S = \{m_i, i = 1 \ldots N_1\}$ e $S' = \{ m_j, j = 1 \ldots N_2\}$ corrisponde al CM di due particelle aventi massa uguale alle masse totali M_1 e M_2 dei due sistemi e poste nel centro di massa di ciascuno dei due sistema:

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CM} &= \textstyle\sum_1^{N1+N2}{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_1^{N1+N2}{}_i\, m_i \\ &= [\textstyle\sum_1^{N1}{}_j\, m_j\, \mathbf{r}_j + \sum_1^{N2}{}_k\, m_k\, \mathbf{r}_k]/[\sum_1^{N1}{}_j\, m_j + \sum_1^{N2}{}_k\, m_k] = \\ &= [M_1\, \mathbf{r}_{CM,1} + M_2\, \mathbf{r}_{CM,2}]/[M_1 + M_2] \end{aligned}$$

Utilità della proprietà distributiva nel calcolo del CM di un sistema continuo fatto di due figure geometriche regolari.

<u>Centro di massa di sistemi continui.</u>

Centro di massa di un sistema continuo, in termini di dm:

$$\mathbf{r}_{CM} = [\int_M \mathbf{r} dm] / [\int_M dm] = [\int_V \mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}) dV[/ [\int_V \rho(\mathbf{r}) dV];$$

$$x_{CM} = [\int_M x dm] / [\int_M dm] = [\int_V x\, \rho(\mathbf{r}) dV[/ [\int_V \rho(\mathbf{r}) dV], \text{ etc. etc.}$$

Un sistema continuo e omogeneo avente forma geometrica regolare ha il CM coincidente con il baricentro (= punto di massima simmetria) della figura geometrica, piana o solida, che rappresenta sistema continuo.

Esempi di calcolo del centro di massa di alcuni sistemi continui:

Semi–disco: $y_{CM} = 4R/3\pi$;

Semi–sfera: $z_{CM} = 3R/8$;

Semi–anello: $y_{CM} = 2R/\pi$;

Guscio semi–sferico: $z_{CM} = R/3$;

Cono: $z_{CM} = h/4$ (distanza misurata dalla base del cono).

<u>Velocità e accelerazione del CM di un sistema di P.M.</u>:

1) $\mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i / \sum_i m_i$ $\quad (v_{X,CM} = \sum_i m_i \mathbf{v}_{xi} / \sum_i m_i$, etc.)

2) $\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i / \sum_i m_i$ $\quad (a_{X,CM} = \sum_i m_i a_{xi} / \sum_i m_i$, etc.)

<u>In alternativa</u> $\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{a}_{CM}$ si ottengono per derivazione da:

$$M\, \mathbf{r}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i :$$

1’) $M\, \mathbf{v}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ direttamente da $M\, d\mathbf{r}_{CM}/dt = \sum_i m_i (d\mathbf{r}_i/dt)$

2’) $M\, \mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i$ direttamente da $M\, d\mathbf{v}_{CM}/dt = \sum_i m_i (d\mathbf{v}_i/dt)$

Pertanto l'accelerazione $\mathbf{a}_S$, derivata precedentemente, non è altro che la media ponderata delle accelerazioni delle singole particelle:

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}_i \,/\, \sum_1{}^N{}_i\, m_i$$

E quindi per un Sistema di P.M., dato che $\sum_1{}^N{}_i = M_S$ (3), si avrà:

$$M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, \mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S{}^{(R)} \qquad (4)$$

dato che la risultante di tutte le forze interne è nulla: $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$.

La (4) è la Iª Legge cardinale della dinamica dei sistemi.

Questa relazione è formalmente identica alla legge di Newton per una super-particella di massa M_S soggetta all'azione di una risultante di forze $\mathbf{F}_S{}^{(R)}$ ottenuta sommando tra di loro le sole forze esterne agenti sulle particelle del sistema.

In virtù delle proprietà del CM del sistema di particelle, la legge $M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_S{}^{(R)}$ può essere espressa come:

$$d\mathbf{P}_S \,/\, dt = \mathbf{F}_S{}^{(R)}$$

oppure come:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(E)};$$

o, più semplicemente, come:

$$M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

La Iª Legge cardinale è nota anche come teorema del centro di massa del sistema di punti materiali: essa sancisce che un sistema di particelle, con riferimento all'azione di un insieme di forze esterne, si muove come un punto materiale avente massa M_S ($M_S = \sum_1{}^N{}_i\, m_i$) soggetto alla forze risultante $\mathbf{F}^{(EXT)} = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(E)}$.

Applicazioni della I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

A) Sistema isolato: (non agiscono forze esterne: $\mathbf{F}^{(e)}_{ik} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{F}^{(e)}_{ik} = 0 \ \Rightarrow \mathbf{F}^{(EXT)} = \sum_1^N{}_i \ [\mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_1^N{}_i \ [\sum_1^R{}_k \mathbf{F}^{(e)}_{ik}] = \mathbf{0}$.

E dato che anche $\mathbf{F}^{(INT)}=0$, si avrà anche $\mathbf{F}_S^{(R)} = 0$, da cui

$$d\mathbf{P}_S / dt = \mathbf{0}$$

Conseguenze: Conservazione della quantità di moto di S:

$$\mathbf{P}_S = \text{costante}$$

N.B.: Si tratta di un fatto sperimentale, sempre verificato.

$\mathbf{P}_S = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{P}_S = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i \ m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \text{cost};$

La conservazione della quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ di un sistema isolato (sul quale non agiscono forze esterne) implica che il centro di massa del sistema si muove come una particella libera:

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{costante.}$$

Esempio di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne:

Sistema astronauta-navicella spaziale che galleggia liberamente nel vuoto si muove di moto rettilineo uniforme con $\mathbf{v}_{CM}$ costante:

$$\mathbf{P}\text{s} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante.}$$

$$d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{F}^{(i)}_{12} = \mathbf{F}^{(i)}_{21} \qquad \Rightarrow \text{Principio A/R}$$

Precisazione relativa alla definizione di sistema isolato:
– quando tutte le forse esterne sono nulle (cioè: $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0}$),

– quando la risultante delle forse esterne agenti sulla singola particella è nulla ($\mathbf{F}i^{(E)} = 0$), il sistema si comporta come se fosse isolato.

Conseguenze del principio di conservazione della $\mathbf{P}_S$:

Conservazione di una o più delle componenti della quantità di moto totale del sistema isolato:

$$Mv_{CM,X} = P_{S,X.}$$

I casi in cui si conserva una sola componente:
– granata che esplode in aria,
– uomo che si sposta su una piattaforma posta su un piano liscio;
– moto di un corpo di massa m su un cuneo di massa M appoggiato a un piano orizzontale liscio: $0 = m\, v_x + M\, V_x$.

B) Sistema di punti materiali non–isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$$\Rightarrow M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{non è più costante, ma } \mathbf{P}_S(t)$$

Questo fatto consegue dalla relazione fra la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze agenti sulle particelle dei sistema:

$$d\mathbf{P}_S/dt = d(\textstyle\sum_1{}^N{}_i\ \mathbf{p}_i)/dt = \sum_i (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}{}^N \mathbf{F}_i^{(R)}$$

$$= \textstyle\sum_1{}^N{}_i\,[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Essendo, sempre, $\mathbf{F}^{(INT)} = \mathbf{0}$ per il principio di azione–reazione.

-I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi in un sistema di riferimento inerziale o del laboratorio (sistema L) si può anche scrivere come: $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\textstyle\sum_1{}^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \quad \text{o equivalentemente} \quad \Rightarrow \quad M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

Esiste una seconda legge (II^a legge cardinale) della dinamica di sistemi che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S rispetto ad un polo O fisso, in un sistema di riferimento inerziale Oxyz (sistema L), al momento delle forze esterne riferito al medesimo polo O.

La II^a legge cardinale è espressa, di fatto, dal teorema del momento della quantità di moto per un sistema S di punti materiali, e viene, in qualche testo, impropriamente chiamata Legge di Newton per il moto rotazionale del sistema:

$$d\mathbf{L}_{O,S} /dt = d(\sum_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Si tratta di un'estensione del teorema del moto della quantità di moto di punto materiale:

$$d\mathbf{L}_O/dt = \boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{r}\wedge\mathbf{F}_R$$

al sistema S di più punti materiali, e si deriva a partire dal momento della quantità di moto totale $\mathbf{L}_{O,S}$ del sistema S:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i\wedge\mathbf{p}_i$$

calcolando:

$$d\mathbf{L}_{O,S} /dt = \sum_i d\mathbf{L}_{O,i}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} =\sum_i\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_i\mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)}+\mathbf{F}_i^{(E)})$$

Nel caso di un sistema isolato di particelle si può dimostrare, in base a evidenze sperimentali, mai contraddette, che $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva dato che, come sappiamo dalla I^a legge cardinale (4), il sistema, in assenza di forze esterne, può essere considerato nel suo insieme come una super-particella libera, il cui momento della quantità di moto si conserva. E quindi dev'essere:

$$\sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i\wedge\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i\wedge \sum_{j\,(j\neq i)}\mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij}\wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

Infatti per un sistema di due particelle (sietema a due corpi):

$\sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

mentre, per un sistema di tre particelle si avrà:

$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ e il momento risultante dei momenti delle forze interne $\boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = 0$. Cioè:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = 0; \qquad \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = 0).$$

2) Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{OS}/dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

essendo, come abbiamo visto $\sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

La II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi è impropriamente chiamata Legge di Newton per il moto rotazionale del sistema.

Riassumendo: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II[a] legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Le leggi più sopra sono state ricavate in un sistema inerziale Oxyz, che d'ora in avanti verrà indicato come sistema L (L=laboratorio).

Dinamica di sistemi di punti materiali: derivazione delle leggi cardinali della dinamica dei sistemi di particelle nel sistema C.

Sistema C: Sistema di riferimento del centro di massa.

Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi cartesiani paralleli agli assi x,y,z di Oxyz.

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0};$

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0};$

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}.$

Calcolo delle grandezze dinamiche: $\mathbf{P}'_S$, $E'_{S,k}$ e $\mathbf{L}'_{CM}$.

$\mathbf{P}'_S = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i = M\,\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0};$

$E'_{k,S} = \sum_{i=1}^N E'_{k,i} = ½ \sum_{i=1}^N m_i v'^2_i = ½ \sum_{i=1}^N (p'^2_i/m_i)$

$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$

Sistema C = sistema a quantità di moto totale nulla:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{0} \text{ (con dimostrazione).}$$

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$, ma

$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i - M\mathbf{a}_{CM}$, dove

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i = \sum_{1}^{N}{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

E quindi:

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \mathbf{F}^{(EXT)} - M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$$

che si può scrivere come $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, che è esattamente la I^a legge cardinale espressa dall'eq. (2)

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM,S}^{(EXT)}$.

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (indipendentemente dal fatto che il CM sia o non sia un punto fisso, e, in quest'ultimo caso, anche quando esso si muovesse di moto non–uniforme).

Nel sistema L:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a :

$$M\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_{1}^{N}{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a'}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a'}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i - M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$ e quindi:

$$d\mathbf{P'}_S/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L'}_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM,S}^{(EXT)}$.

Riassumendo: Abbiamo derivato le due leggi cardinali in termini delle due grandezze collettive $\mathbf{P}_S$ e $\mathbf{L}_{O,S}$ (Sistema L) e di $\mathbf{P'}_S$ e $\mathbf{L'}_{CM,S}$ (Sistema C) e dimostrato che il Sistema C può essere usato in alternativa al sistema L, dal momento che in esso valgono entrambe le leggi cardinali.

Nel sistema del centro di massa (Sistema C) abbiamo definito le grandezze collettive $\mathbf{P'}_S$ **e** $\mathbf{L'}_{CM,S}$, resta da definire $E'_{k,S}$.

Consideriamo ora l'energia cinetica di un sistema S:
$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i\ E_{k,i} = \sum_1^N{}_i\ \frac{1}{2} m_i v_i^2$. (nel sistema L, ancorato in O)

$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i E'_{k,i} = \sum_1^N{}_i\ \frac{1}{2} m_i v'^2_i$ (nel sistema C, ancorato a CM)

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna del sistema S: $E_{k,S}^{INT}$

Teoremi di Konig

Teoremi di Konig: mettono in relazione le grandezze dinamiche collettive (quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica) calcolate nel sistema L e con le equivalenti grandezze collettive calcolate nel sistema C:

- quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P'}_S = M\mathbf{v}_{CM}$.

N.B.: Dimostrazione (banale):

$\mathbf{P}_S = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i) = (\sum_i m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_i\ m_i \mathbf{v'}_i = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{0}$

-momento della quantità di moto: $\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

N.B.: Dimostrazione:

$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i) \wedge m_i(\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) =$
$\sum_i \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i$
$= \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_i m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

perchè: $\sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} = \sum_i (m_i \mathbf{r}'_i) \wedge \mathbf{v}_{CM} = 0$
e cosi' pure: $\sum_i \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = 0$.

<u>Nota Bene</u>: Altre proprietà del momento angolare:
Dalla relazione fra i momenti angolari del sistema S calcolati rispetto al polo fisso O e rispetto a un punto O', si dimostra che il teorema del momento angolare vale oltre che per O' fisso, anche quando O' non è fisso purché sia coincidente con il CM del sistema di punti materiali: O' = CM!

Validità del teorema del momento angolare rispetto al CM, calcolato usando sia le grandezze in L che in C:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$$

Dimostrazione:

$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = \sum_i r'_i \wedge m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_i \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}$ e

$d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i r_i' \wedge m_i \mathbf{a}'_i = \sum_i r_i' \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} - m_i \mathbf{a}_{CM}) = \sum_i \mathbf{r}_i' \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_i \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}$,

perchè: $\sum_i \mathbf{r}'_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} = 0$ e $\sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{a}_{CM} = \sum_i (m_i \mathbf{r}'_i) \wedge a_{CM} = 0$.

-dell'energia cinetica: $E_{k,S} = ½ M v_{CM}^2 + E_{k,S}' = E_{k,CM} + E_{k,INT}$

Dimostrazione:

$E_{k,S} = =\sum_i E_{k,i} = ½ \sum_i m_i v_i^2 = ½ \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = ½ \sum_i m_i (\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i)\cdot(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = ½ \sum_i m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + ½ \sum_i m_i v'^2_i = ½ M v_{CM}^2 + E_{k,S'}$.

Teoremi di Konig: Scomposizione del moto di un sistema di punti materiale (es un solido) nella somma del suo moto orbitale e del suo moto intrinseco o interno.

Esempi: moto della luna (sfera) attorno alla terra = moto orbitale di un P.M. di massa M del luna con velocità v_{CM} (Sist. L) + moto intrinseco della luna riferito al suo centro di massa (Sist. C).

Definizione di manubrio: sistema rigido costituito da due corpi puntiformi attaccati alle estremità opposte di un’asta rigida sottile di massa trascurabile (che ha il compito di mantenere i due corpi a distanza fissa durante il moto).
N.B:: Si parla di manubrio simmetrico quando le due masse sono uguali tra loro, e di manubrio asimmetrico in caso contrario.

Eenergia meccanica totale di un sistema di particelle:

Resta da vedere cosa comporta il teorema dell'energia per un sistema di particelle, che sancisce l’equivalenza fra la variazione di energia cinetica e il lavoro delle forze agenti.

Il <u>teorema dell’energia di un sistema di particelle (in termini finiti)</u>

$$\Delta E_{k,S,\,AB} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W_{S,AB}$$

dove $W_{S,AB}$ è il lavoro di tutte le forze (interne ed esterne) agenti sui punti materiali del sistema S quando passa dallo stato iniziale A allo stato finale B.

N.B.: Lo stato di un sistema è definito dall’insieme delle velocità e delle posizione dei singoli punti che costituiscono il sistema S.

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle in termini infinitesimi o elementari si scrive come:

$$dE_{k,S} = dW_S = dW_S^{(EXT)} + dW_S^{(INT)}.$$

Lavoro elementare delle forze esterne:

$$dW_S^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} dW^{(E)}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i \qquad (5)$$

Lavoro elementare delle forze interne:

$$dW_S^{(INT)} = \sum_{i=1}^{N} dW^{(I)}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1\,(j\neq i)}^{N} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

N.B.: $\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N [\sum_{1}^{N}{}_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}^{(i)}_{ij}) \cdot d\mathbf{r}_i] = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1\,(j\neq i)}^{N} \mathbf{F}^{(i)}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \neq 0$

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle:

$$\Delta E_{k,S,\,AB} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W_{S,AB}^{(EXT)} + W_{S,AB}^{(INT)}$$

Ora, se le forze interne sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale delle forze interne:

$$dE_{p,S}^{(INT)} = -\,dW_S^{(INT)} = -\sum_{i=1}^{N} dWi^{(I)} = -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1\,(j\neq i)}^{N} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Si avrà che la (5) diventa:

$$dE_{k,S} = dW_S^{(EXT)} - dE_{p,S}^{(INT)}, \text{ ossia } dE_{k,S} + dE_{p,S}^{(INT)} = dW_S^{(EXT)}$$

Def. di Energia propria del sistema S: $U_S = E_{k,S} + E_{p,S}^{INT}$.

Vale la relazione $d(E_{k,S} + E_{p,S}^{INT}) = dW_S^{EXT}$, ossia $dU = dW^{EXT}$

Se poi anche le forze esterne sono conservative, e quindi si può definire un'energia potenziale delle forze esterne:

$$dE_{p,S}^{(EXT)} = -\sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_i dWi^{(E)} = -\,dW_S^{(EXT)},$$

allora si potrà scrivere: $dU_S = - dE_{p,S}^{(EXT)}$,
e quindi $d(U_S + E_{p,S}^{(EXT)}) = 0$, cioè: $dE_{T,S} = 0$,

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$.

Conservazione della Energia totale meccanica $E_{T,S}$ di un sistema S di particelle soggette all'azione di sole forze conservative:

$$E_{T,S} = U + E_p^{(EXT)} = \text{costante del moto.}$$

Esempio: Due corpi puntiformi collegati fra loro da una molla in moto nel campo di forza gravitazionale della terra.

Nel sistema C, ancorato al CM: $E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$ e la somma $E_{k,S}^{INT} + E_{k,S}^{INT} = (E_{k,S}+E_P)^{INT} = U_S^{INT}$, che è chiamata anche energia interna.

Nota Bene: Dipendenza dell' $E_{k,S}$ dal sistema di riferimento scelto e indipendenza dell'$E_{p,S}^{(INT)}$ dal sistema di riferimento scelto.

In conclusione, i teoremi di Konig consentono di scomporre il moto di un sistema S nel moto orbitale del suo CM, riferito ad un osservatore inerziale Oxyz, e nel moto intrinseco o interno del sistema rispetto al suo CM, riferito al sistema CMxyz .

Esempio: moto della luna attorno alla terra descritto in un sistema di riferimento inerziale usato per l'osservazione = moto orbitale di un punto materiale di massa M pari alla massa della luna che si muove con velocità $\mathbf{v}_{CM}$ + moto intrinseco rispetto al CM della luna, indipendente dal sistema riferimento inerziale usato per l'osservazione.