# Statistica Descrittiva III

**Serie statistiche bi-variate**

- Definizioni
- Rappresentazioni tabellari e grafiche
- Indici di posizione e di variabilità
- Dipendenza lineare: retta di regressione ed indice R.

# Serie Bi-variate

- Serie bi-variate: serie statistica in cui da ogni unità statistica si rilevano due caratteri.

$$o_i = (x_i ; y_i) \qquad O=\{o_i\}$$

- Esempio 1:
  - Popolazione: 15 studenti di matematica.
  - Caratteri:

    X: genere  Y: altezza
  - Osservazioni:

*(F; 155) (M; 173) (M; 191) (F; 163) (F; 159) (M; 178)*
*(M; 183) (M; 169) (F; 169) (M; 170) (M; 183) (M; 177)*
*(M; 175) (M; 176) (F; 170)*

# Serie Bi-variate: esempi - I

- Esempio 2:
  - Popolazione: 16 cavie di laboratorio.
  - Caratteri:

X: trattamento antibiotico {Si ; No}

Y: stato dell'infezione {Espansa, Stabile, Ridotta}

  - Osservazioni:

$$(S\ ;\ E)\ (S\ ;\ R)\ (S\ ;\ R)\ (S\ ;\ R)\ (S\ ;\ R)\ (S\ ;\ S)\ (S\ ;\ R)\ (S\ ;\ S)$$

$$(S\ ;\ R)\ (N\ ;\ S)\ (N\ ;\ S)\ (N\ ;\ E)\ (N\ ;\ E)\ (N\ ;\ S)\ (N\ ;\ R)\ (S\ ;\ E)$$

- Osservazione: i caratteri della serie possono essere non omogenei.

# Serie Bi-variate: esempi - II

- Esempio 3:
  - Popolazione: 15 studenti di matematica.
  - Caratteri:

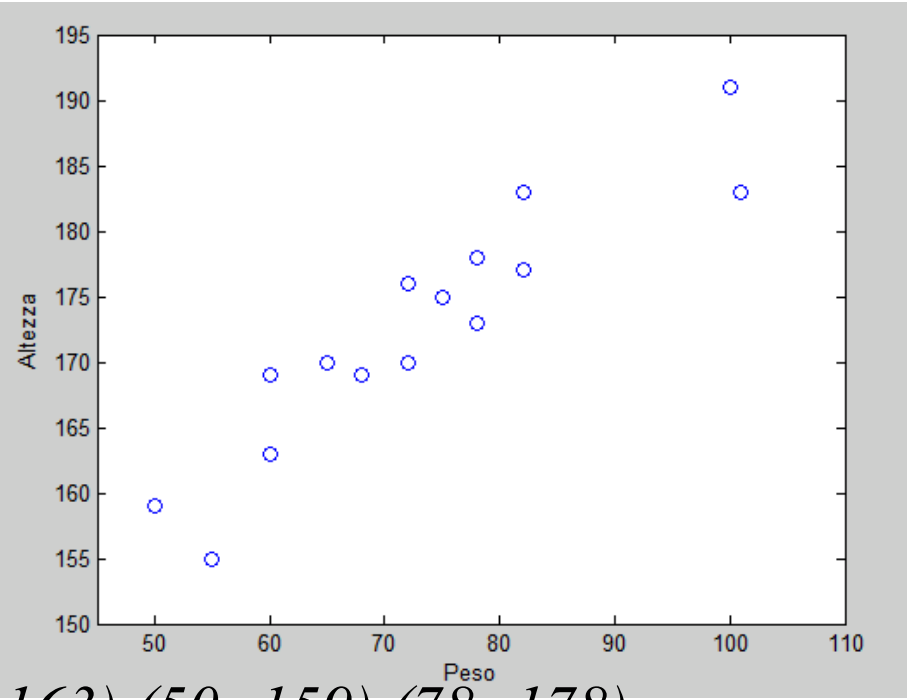
    X: peso  Y: altezza
  - Osservazioni:

*(55; 155) (78; 173) (100; 191) (60; 163) (50; 159) (78; 178)*
*(101; 183) (68; 169) (60; 169) (72; 170) (82; 183)*
*(82; 177) (75; 175) (72; 176) (65; 170)*

- Osservazione: se i caratteri sono omogenei (es. quantitativi continui) possiamo estendere il concetto alla serie bivariata (serie quantitativa continua).

# Scatter plot (diagrammi a dispersione)

- Rappresentazione grafica usata per serie quantitative, in cui ogni osservazione viene riportata in un piano cartesiano come fosse un punto.
- Esempio 3:
  - Caratteri:
    - X: peso
    - Y: altezza
  - Osservazioni:




*(55; 155) (78; 173) (100; 191) (60; 163) (50; 159) (78; 178) (101; 183) (68; 169) (60; 169) (72; 170) (82; 183) (82; 177) (75; 175) (72; 176) (65; 170)*

# Modalità: definizione

- Osservazione il concetto di modalità è legato al carattere.
- Problema: è possibile estenderlo alla Serie?
  - in una monovariata serie e carattere coincidono.
  - una serie bi-variata è formata da due caratteri.
- Conseguenza: vi sono 3 tipi di modalità
  - $M_x$: modalità carattere $X$.
  - $M_y$: modalità carattere $Y$.
  - $M = M_x M_y$: modalità serie (# possibili coppie).

# Modalità serie: esempio

- Esempio 2:
  - Popolazione: 16 cavie di laboratorio.
  - Modalità caratteri:

X: trattamento antibiotico — {Si; No} — $M_x = 2$

Y: stato dell'infezione — {Espansa, Stabile, Ridotta} — $M_y = 3$

  - Modalità serie: $M = M_x M_y = 6$

| | | Infezione | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta |
| Trattamento | Si | (S; E) | (S; S) | (S; R) |
| | No | (N; E) | (N; S) | (N; R) |

# Modalità serie: classi

- Esempio 1:
  - Popolazione: 15 studenti di matematica.
  - Modalità caratteri:

X: Genere

{M; F}

$M_x = 2$

Y: altezza

$\{155;159;163;169;170;173;$
$175;176;177;\ 178;183;191\}$

$M_y = 12$

  - Modalità serie: $M = M_x M_y = 24$

- Osservazione: nel caso continuo spesso si introducono classi di modalità.

# Modalità serie: classi

- Esempio 1:
  - Popolazione: 15 studenti di matematica.
  - Modalità caratteri:

X: Genere  Y: altezza

{M; F}  $\{155\text{-}165;165\text{-}175;175\text{-}185;185\text{-}195\}$

$M_x = 2$  $C_y = 4$

- Modalità serie: $M = M_x C_y = 8$

| | | Altezza | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 155 - 165 | 165 - 175 | 175 - 185 | 185-195 |
| Genere | M | $m_{1,1}$ | $m_{1,2}$ | $m_{1,3}$ | $m_{1,4}$ |
| | F | $m_{2,1}$ | $m_{2,2}$ | $m_{2,3}$ | $m_{2,4}$ |

- Le diverse modalità si indicano con $m_{i,j}$.

# Serie mono-variate: frequenza.

- Frequenza: un valore associato ad ogni modalità
  - assoluta ($n_i$): # osservazioni della modalità $i$.
  - relativa ($f_i$): frazione delle osservazioni della modalità $i$.

    $f_i = n_i / N$
  - cumulata ($F_i$): frazione delle osservazioni delle modalità non più grandi di $i$. $(F_i = (n_1 + n_2 + \ldots + n_i)/N)$
- Come estendere il concetto alle serie bi-variate?
- Osservazione: nelle bi-variate la singola modalità viene definita da due indici $(i, j)$.

# Serie bi-variate: frequenza assoluta.

- Frequenza: un valore associato ad ogni modalità $i, j$
  - assoluta ($n_{i,j}$): # osservazioni della modalità $i,j$.
- Esempio 2
  - Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

| | | Infezione | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta |
| Tratta mento | Si | $n_{1,1}$ | $n_{1,2}$ | $n_{1,3}$ |
| | No | $n_{2,1}$ | $n_{2,2}$ | $n_{2,3}$ |

| | | Infezione | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta |
| Tratta mento | Si | *2* | *2* | *6* |
| | No | *2* | *3* | *1* |

# Tabelle a doppia entrata.

- Tabella a doppia entrata: tabella delle frequenze assolute completata con i totali di riga e colonna.
- Osservazione: alcuni autori usano il termine tabella di contingenza.
- Esempio 2
  - Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

| | | Infezione | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta | Totali |
| Trattamento | Si | *2* | *2* | *6* | 10 |
| | No | *2* | *3* | *1* | 6 |
| | Tot | 4 | 5 | 7 | 16 |

$n_{i,+}$:Frequenze assolute carattere trattamento

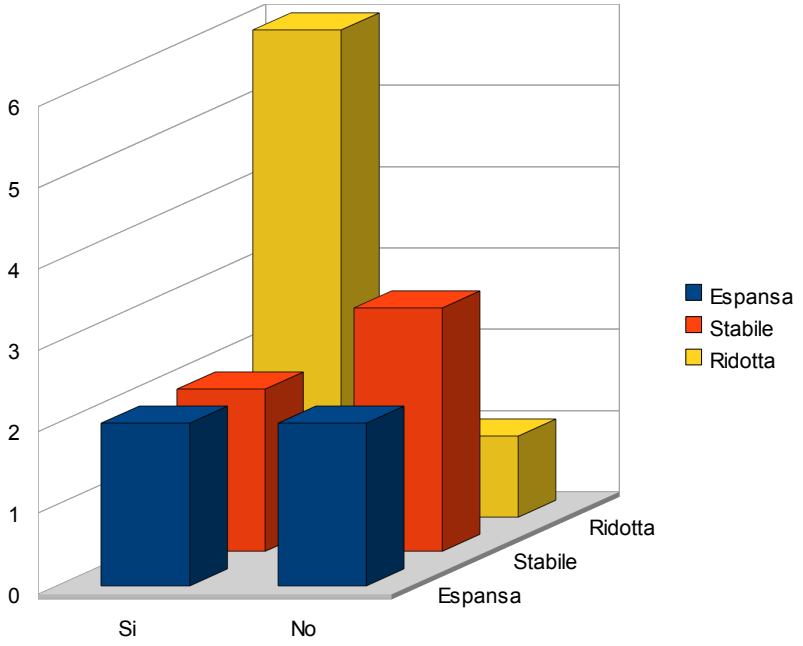
$n_{+,j}$:Frequenze assolute carattere infezione

$N$: Totale osservazioni

# Serie bi-variate: diagramma a barre

- Diagramma a barre: rappresentazione 3 D di frequenze assolute per serie bi-variate.
- Osservazione: usato serie a caratteri qualitativi e/o discreti.
- Esempio 2
  - Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

| | | Infezione | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta |
| Trattamento | Si | *2* | *2* | *6* |
| | No | *2* | *3* | *1* |



# Serie bi-variate: frequenza assoluta.

- Frequenza: un valore associato ad ogni modalità $i, j$
  - assoluta ($n_{i,j}$): # osservazioni della modalità $i,j$.
  - relativa ($f_i = n_{i,j} / N$): frazione osservazioni modalità $i,j$.
- Esempio 2
  - Osservazioni: (S;E) (S;R) (S;R) (S;R) (S;R) (S;S) (S;R) (S;S) (S;R) (N;S) (N;S) (N;E) (N;E) (N;S) (N;R) (S;E)

| | | Infezione | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta | |
| Trattamento | Si | $f_{1,1}$ | $f_{1,2}$ | $f_{1,3}$ | $f_{1,+}$ |
| | No | $f_{2,1}$ | $f_{2,2}$ | $f_{2,3}$ | $f_{2,+}$ |
| | | $f_{+,1}$ | $f_{+,2}$ | $f_{+,3}$ | 1 |

| | | Infezione | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta | |
| Trattamento | Si | *2/16* | *2/16* | *6/16* | *5/8* |
| | No | *2/16* | *3/16* | *1/16* | *3/8* |
| | | *1/4* | *5/16* | 7/16 | 1 |

# Serie mono-variate: indici di posizione.

- Indici di posizione: il valore "centrale" della serie $S$.
  - moda ($mo$): modalità con frequenza maggiore.
    (tutti i dati – per dati continui si parla di classe/i modale)
  - mediana ($me$): osservazione che bipartisce la popolazione
    (solo dati ordinabili)
  - media ( $\overline{S}$ ): media delle osservazioni.
    (solo dati quantitativi)

  Come estendere il concetto alle serie bi-variate?
- Osservazione: in una bi-variata le osservazioni sono vettori.
- Proposta:cerco di estendere al caso multidimensionale il criterio di calcolo.
- Osservazione: debbo scegliere un indice che sia calcolabile per ambo i caratteri.

# Serie bi-variate: moda.

- Indici di posizione: il valore “centrale” della serie $S$.
  - moda ($mo$): modalità con frequenza maggiore.
    (tutti i dati – per dati continui si parla di classe/i modale)
- In una serie bi-variata ho definito sia modalità che frequenza
- Posso applicare direttamente la definizione
- Esempio 1

  $mo = (Si\ ;\ Ridotta)$

| | | Infezione | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Espansa | Stabile | Ridotta |
| Trattamento | Si | *2* | *2* | *6* |
| | No | *2* | *3* | *1* |

- Esempio 2

  $mo = (M\ ;\ 175\text{-}185)$

| | | Altezza | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 155 - 165 | 165 - 175 | 175 - 185 | 185-195 |
| Genere | F | *3* | *2* | *0* | *0* |
| | M | *0* | *3* | *6* | *1* |

# Serie bi-variate: moda - osservazioni.

- Un una serie bivariata vi sono tre diverse mode.
- Esempio: data la serie a lato si hanno le seguenti
  - Moda della Serie
    $mo = (C\ ;\ 10)$
  - Moda caratteri
    - $mo_X = A$
    - $mo_Y = 30$

| | | X | | | Totali |
|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | |
| Y | 10 | 1 | 2 | 6 | 9 |
| | 20 | 4 | 3 | 1 | 8 |
| | 30 | 5 | 3 | 2 | 10 |
| Totali | | 10 | 8 | 9 | 27 |

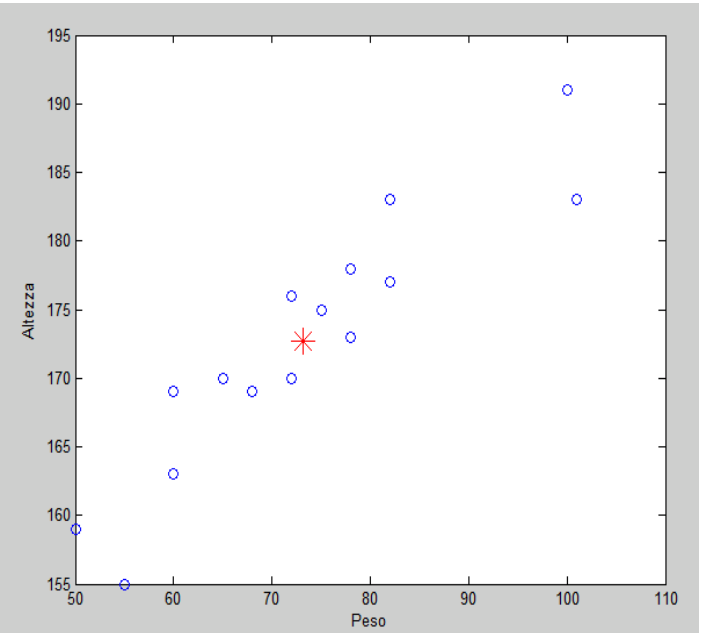
- Osservazione: la moda di una serie bi-variata può non coincidere con la moda dei singoli caratteri.

# Serie bi-variate: mediana.

- Indici di posizione: il valore “centrale” della serie $S$.
  - moda ($mo$): modalità con frequenza maggiore.
    (tutti i dati – per dati continui si parla di classe/i modale)
  - mediana ($me$): osservazione che bipartisce la popolazione
    (solo dati ordinabili)
- Osservazione: le osservazioni sono vettori a 2 dimensioni.
- Osservazione: non è possibile ordinare in modo univoco vettori a due dimensioni.
- Osservazione: la mediana richiede l'ordinamento delle osservazioni.
- Conseguenza: la mediana non si applica a serie bi-variate.

# Serie bi-variate: indici di posizione.

- Indici di posizione: il valore "centrale" della serie $S$.
  - media ( $\overline{S}$ ): media delle osservazioni. (solo dati quantitativi)
- Per applicare la definizione debbo
  - sommare più vettori
  - dividere un vettore per un numero.
- Esempio 3




$$( (55; 155) + (78; 173) + ... + (65; 170))/15 =$$
$$= (55 + 78 + ... + 65; 155 + 173 + ... + 170)/15 =$$
$$= ((55 + 78 + ... + 65)/15; (155 + ... + 170)/15) =$$
$$= (73.20; 172.73)$$

- Osservazione: la media della serie è data dalle medie dei caratteri

$$\overline{S} = (\overline{X}; \overline{Y})$$

# Serie mono-variate: indici di variabilità.

- Indici di variabilità: quanto le osservazioni si discostano dal "centrale" della serie $S$.
  - range : osservazione maggiore meno osservazione minore
  - distanza interquartile ($D$): differenza terzo, primo quartile
  - varianza ($\sigma^2$): media degli scarti dalla media
- Osservazione: calcolabili solo per dati quantitativi.

Come estendere il concetto alle serie bi-variate?

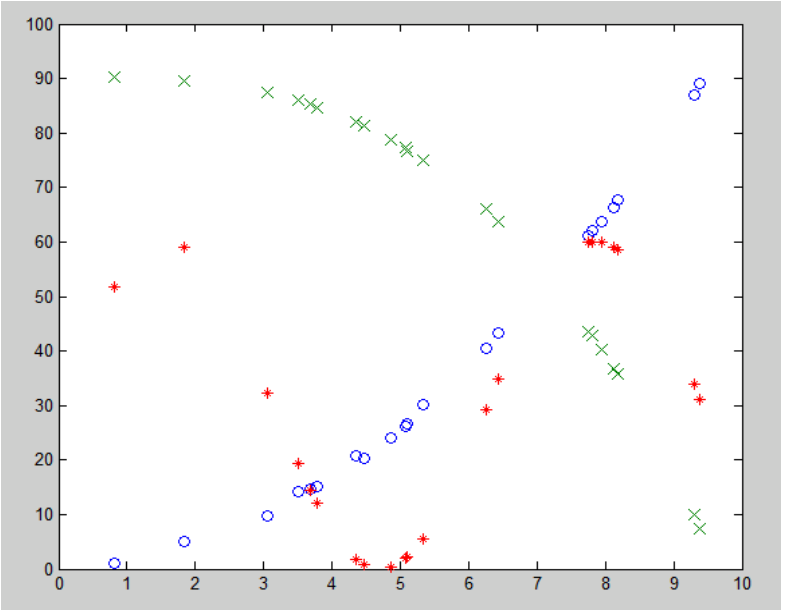
- Osservazione: non è possibile ordinare un gruppo di vettori a due dimensioni.
- Proposta: estendo solo la varianza.

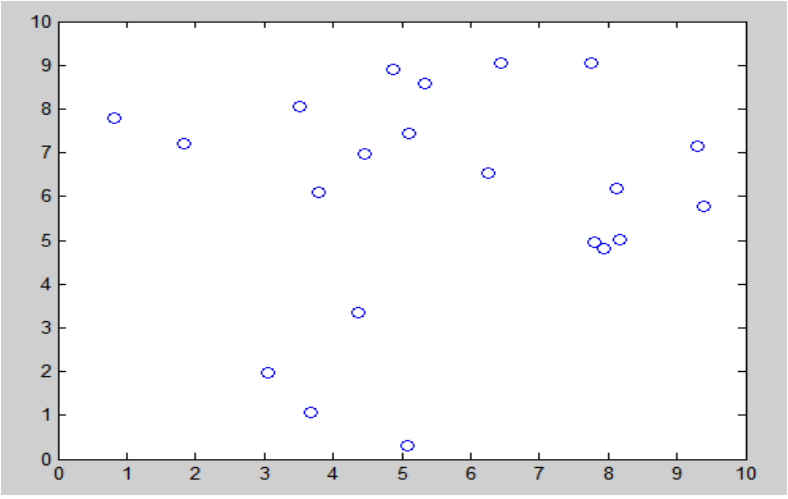
# Serie bi-variate:indice di variabilità-I.

- Osservazione: la variabilità in una serie bivariata può essere dovuta a tre fattori
  - Variabilità carattere $X$.
  - Variabilità carattere $Y$.
  - Mutua influenza dei due valori.
- Esempio:
  - Popolazione 4 persone
  - Caratteri
    - X =Altezza della persona in cm
    - Y =Altezza della persona in m
  - Osservazioni (150; 1.5) (170;1.7) (180;1.8) (160;1.6)
- Nota l'osservazione di X “ho” quella di Y, pertanto la variabilità di Y è legata a quella di X.

# Mutua influenza: classificazione

- Due caratteri possono essere legati in diversi modi
  - Proporzionalità diretta:
    al crescere di $x$
    cresce $y$. (o)
  - Proporzionalità inversa:
    al crescere di $x$
    decresce $y$. (x)
  - Legame misto. (*)




- Due caratteri possono essere indipendenti

# Covarianza: idea base.

- Come misuro il “grado di legame” fra i due caratteri ?
- Proposta: data un osservazione $(x_i; y_i)$ valuto il prodotto dei due scarti (distanza dai rispettivi valori medi $\bar{x}$ e $\bar{y}$).

$$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Osservazione: il singolo prodotto è:
  - positivo: gli scarti sono concordi (hanno lo stesso segno) proporzionalità diretta: ad una osservazione di x sopra media corrisponde una y sopra media e viceversa
  - negativo in caso contrario (proporzionalità inversa).
- Se i due caratteri sono legati, tutti i contributi sono concordi.
- Sperabilmente, se i caratteri sono indipendenti, si avranno sia contributi negativi che positivi.

# Covarianza: definizione I.

- Definizione: data un serie bi-variata avente $N$ osservazioni $(x_i ; y_i)$ definisco covarianza

$$\sigma_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- Esempio
  - Osservazioni (150; 1.5) (170;1.7) (180;1.8) (160;1.6)
  - Media = (165,1.65)
  - Varianza $X$ = ($150^2$ + $170^2$ +$180^2$ +$160^2$ )/4 - $165^2$ = 125
  - Varianza $Y$ = ($1.5^2$ + $1.7^2$ +$1.8^2$ +$1.6^2$ )/4 - $1.65^2$ = 0.0125
  - Contributi = (-15*-0.15) (5*0.05) (15*0.15) (-5*-0.05)
  - Covarianza = (2.25 + 0.25 + 2.25 + 0.25)/4 = 1.25
- Osservazione: la definizione non usa le frequenze relative

# Covarianza: definizione II.

- Definizione: data un serie bi-variata $(x_i ; y_i)$ avente $M = M_x M_y$ modalità, con frequenza relativa $f_{i,j}$ definisco covarianza

$$\sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) f_{i,j}$$

- Esempio 4
  - S: numero di teste lanciando due monete
  - N = 80

| | | Lancio 1 (X) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | |
| Lancio 2 (Y) | 0 | *22/80* | *20/80* | 42/80 |
| | 1 | *18/80* | *20/80* | 38/80 |
| | | 40/80 | 40/80 | 1 |

$$\bar{x} = 0\frac{40}{80} + 1\frac{40}{80} = \frac{1}{2} \qquad \bar{y} = 0\frac{42}{80} + 1\frac{38}{80} = \frac{19}{40} \qquad \sigma_{XY} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (x_i - \frac{1}{2})(y_j - \frac{19}{40}) f_{i,j}$$

$$\sigma_{XY} = (0-\frac{1}{2})(0-\frac{19}{40})\frac{22}{80} + (0-\frac{1}{2})(1-\frac{19}{40})\frac{18}{80} + (1-\frac{1}{2})(0-\frac{19}{40})\frac{20}{80} + (1-\frac{1}{2})(1-\frac{19}{40})\frac{22}{80}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{19}{40}\frac{22}{80} - \frac{1}{40}\frac{18}{80} - \frac{19}{40}\frac{20}{80} + \frac{1}{40}\frac{22}{80} = 0.013125$$

# Serie bi-variate:indice di variabilità-II.

- Osservazione: la variabilità in una serie bivariata può essere dovuta a tre fattori
  - Variabilità carattere $X$.
  - Variabilità carattere $Y$.
  - Mutua influenza dei due valori.
- la variabilità viene definita mediante la seguente matrice detta matrice varianze/covarianza:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

- Osservazione: $\Sigma$ è sempre simmetrica.
- Osservazione: si dimostra che $\Sigma$ è sempre definita positiva.

# Covarianza: osservazione.

Cosa succede se aumento la variabilità dei caratteri?

- Desiderio: $\sigma_{XY}$ dovrebbe descrivere solo la mutua variabilità fra i caratteri quindi vorrei non variasse.
- Verifica: modifico la variabilità delle precedenti osservazioni.
  - Precedenti [150; 1.5] [170;1.7] [180;1.8] [160;1.6]
  - Osservazioni (140; 1.4) (170;1.7) (190;1.9) (160;1.6)
  - Media = (165,1.65) [(165,1.65)]
  - Varianza $X$ = 325 [125]
  - Varianza $Y$ = 0.0325 [0.0125]
  - Contributi = (-25*-0.25) (5*0.05) (25*0.25) (-5*-0.05)
  - Covarianza = (6.25 + 0.25 + 6.56 + 0.25)/4 = 3.25 [1.25]
- Osservazione: il valore della covarianza è legato alla variabilità.

# Correlazione (di Pearson): definizione.

- Definizione: data un serie bi-variata $(x_i ; y_i)$ definisco correlazione (di Pearson) il valore

$$R = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y}$$

- Osservazione: spesso di una serie dispongo della varianza invece che della deviazione standard.
- Alcuni autori preferiscono utilizzare la versione “quadrata” del coefficiente di correlazione per motivi pratici.

$$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

# Correlazione (di Pearson): esempi - I.

- Esempio:
  - Osservazioni (150; 1.5) (170;1.7) (180;1.8) (160;1.6)
  - Varianza $X$ = 125
  - Varianza $Y$ = 0.0125
  - Covarianza = 1.25

$$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{1.25^2}{125 \cdot 0.00125} = 1$$

- Esempio modificato
  - Osservazioni (140; 1.4) (170;1.7) (190;1.9) (160;1.6)
  - Varianza $X$ = 325
  - Varianza $Y$ = 0.0325
  - Covarianza = 3.25

$$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = \frac{3.25^2}{325 \cdot 0.00325} = 1$$

- Osservazione: $R$ sembra meno influenzato dalla variabilità

# Correlazione (di Pearson): esempi - II.

- Osservazione: la definizione di R si applica direttamente anche al caso avessi frequenze relative.
- Esempio 4
  - S: numero di teste lanciando due monete

| | | Lancio 1 (X) | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | |
| Lancio 2 (Y) | 0 | *22/80* | *20/80* | 42/80 |
| | 1 | *18/80* | *20/80* | 38/80 |
| | | 40/80 | 40/80 | 1 |

$$\bar{x}=\frac{1}{2} \qquad \bar{y}=\frac{19}{20} \qquad \sigma_{XY}=0.013125$$

$$\sigma_X^2=0^2\frac{1}{2}+1^2\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \qquad \sigma_Y^2=0^2\frac{21}{40}+1^2\frac{19}{40}-\left(\frac{19}{40}\right)^2=\frac{399}{1600}\simeq\frac{1}{4}$$

$$R=\frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}=0.0525$$

- Osservazione: a bassi valori di $R$ (o $R^2$) sembrano corrispondere legami deboli fra i caratteri.

# Correlazione (di Pearson): proprietà.

- Si dimostrano le seguenti proprietà:

  a) $-1 \leq R \leq 1$

  b) Se per ogni osservazione $y_i = a\, x_i + b$ allora $|R| = 1$.

  c) Se $(x; y)$ sono ottenute da realizzazioni di vv. cc. $X$ ed $Y$ <u>indipendenti</u> allora

  - $R$ è una v.c.
  - $E[R] = 0$.

- Osservazione: la proprietà b) <u>non</u> implica che se $R = \pm 1$ i caratteri della serie sono affini (o in ogni caso legati).
- Osservazione: la proprietà c) <u>non</u> implica che se $R = 0$ i caratteri della serie sono indipendenti.
- Deduzione: $R$ è un indicatore, non fornisce alcuna certezza.

# Variabili dipendenti:esempio I - I.

- Esempio:
  - Siano $X$ ed $Y$ due vv. cc. tali che $Y = 2\,X^2$
  - Supponiamo che
    - si abbiano 4 estrazioni di
      $x_1 = 1 \;;\; x_2 = 2 \;;\; x_3 = -2 \;;\; x_4 = -1$
    - cui corrispondono 4 osservazioni della bivariata $(x_i, y_i)$

      $(1;2) \quad (2;4) \quad (-2;4) \quad (-1;2)$

- Come sarà il coefficiente $R^2$ ?
- Osservazione: Le osservazioni sono dipendenti.
- Osservazione: Il legame fra le osservazioni è di tipo misto.
- Deduzione: ?

# Variabili dipendenti:esempio I - II

- Osservazioni: *(1;2) (2;4) (-2;4) (-1;2)*
- Calcolo momenti dei singoli caratteri

$$\bar{x}=\frac{1+2-2-1}{4}=0 \qquad \sigma_X^2=\frac{1+4+4+1}{4}-0^2=\frac{5}{2}$$

$$\bar{y}=\frac{2+4+4+2}{4}=3 \qquad \sigma_y^2=\frac{4+16+16+4}{4}-3^2=1$$

- Calcolo covarianza

$$\sigma_{XY}=\frac{1}{4}\left[(1-0)(2-3)+(2-0)(4-3)+(-2-0)(4-3)+(-1-0)(2-3)\right]$$

$$\sigma_{XY}=\frac{-1+2-2+1}{4}=0 \qquad R^2=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}=\frac{0^2}{\frac{5}{2}\cdot 1}=0$$

- Osservazione: nel caso di variabili con legame non lineare $R$ può dare delle false certezze.

# Variabili dipendenti:esempio II - I.

- Esempio 5:
  - Siano $X$ ed $Y$ due vv. cc. tali che $Y = 2X + 0.5Z$
  - Dove $Z$ è la v.c. Normale standard
  - Supponiamo che
    - si abbiano 4 estrazioni di $X$ e $Z$

$$(x_1 = 1; z_1 = 0.1) \;;\; (x_2 = 2 \;; z_2 = -0.1) \;\; (x_3 = -2 \;; z_3 = -0.2) \;\; (x_4 = -1 \;; z_2 = 0.2)$$

    - cui corrispondono 4 osservazioni della bivariata $(x_i, y_i)$

$$(1;2.05) \quad (2;3.95) \quad (-2;-4.1) \quad (-1;-1.9)$$

- Come sarà il coefficiente $R^2$ ?
- Osservazione: Le osservazioni sono dipendenti
- Osservazione: L'influenza di $X$ su $Y$ è prevalente rispetto a quella di $Z$ su $Y$. ($Z$ può considerarsi un rumore o disturbo)
- Osservazione: Il legame fra le osservazioni è di tipo misto.

# Variabili dipendenti:esempio II - II

- Osservazioni: *(1;2.05) (2;3.95) (-2;-4.1) (-1;-1.9)*
- Calcolo momenti dei singoli caratteri

$$\bar{x}=\frac{1+2-2-1}{4}=0 \qquad \bar{y}=\frac{2.05+3.95-4.1-1.9}{4}=0$$

$$\sigma_X^2=\frac{1+4+4+1}{4}-0^2=\frac{5}{2} \qquad \sigma_y^2=\frac{4.2025+15.6025+16.81+4.41}{4}-0^2=10.05625$$

- Calcolo covarianza

$$\sigma_{XY}=\frac{1}{4}\left[(1-0)(2.05-0)+(2-0)(3.95+0)+(-2-0)(-4.1-0)+(-1-0)(-1.9-0)\right]$$

$$\sigma_{XY}=\frac{2.05+7.9+8.2+1.9}{4}=\frac{20.05}{4}=5.0125$$

- Calcolo correlazione

$$R^2=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}=\frac{5.0125^2}{2.5\cdot 10.05625}=1$$

# Legami fra caratteri.

Come riconoscere in maniera quantitativa

il legame fra i due caratteri di una bivariata?

- Idea: scelgo un tipo di legame utile e cerco quello che meglio approssima i dati.

- Per poter concretizzare l'idea debbo definire
  - Che cosa sia un legame
  - Che cosa voglia dire un legame utile
  - Come misuro la bontà dell'approssimazione.

# Legami fra caratteri: modelli.

Come descrivere in maniera quantitativa

un legame fra i due caratteri?

- Osservazione: ogni dato è una coppia di misure ($x$ ed $y$).
- In “matematichese” un legame fra due elementi di un insieme è definito funzione.
- Soluzione: considero legame una funzione $m: X \rightarrow Y$.
- Ad ogni misura $x_i$ di $X$ il legame “predice” una possibile misura $\hat{y}_i = m(x_i)$ chiamata predizione.
- Poiché $m(.)$ “descrive” il legame viene chiamato modello.

# Modelli: tassonomia.

Quanti modelli esistono?

- Osservazione: il numero di funzioni possibili è enorme
- Il problema di identificazione è troppo complesso!
- Osservazione: esistono diversi tipi di funzioni
  - Polinomiali - Trigonometriche
  - Esponenziali - ...
- Spezzo il problema in due:
  - Trovo il tipo di funzione (scelta umana)
    - es. polinomi di secondo grado
  - Trovo la funzione “migliore” fra le scelte. (data driven)
    - es. $\hat{y}_i = 14\,x_i^2 + 12\,x_i + 5$

# Modelli: cosa vuol dire migliore? .

- In generale si predilige la semplicità.
- Modelli “semplici”
  - Affine $\hat{y}_i = a\,x_i + b$
  - Parabolico $\hat{y}_i = a\,x_i^2 + b\,x_i + c$
- Osservazione:ogni famiglia di modelli possiede un insieme di parametri
  - affine: $\{a, b\}$
  - parabolico: $\{a, b, c\}$.
- Osservazione: scelto il tipo di modello, la relazione viene definita una volta identificati i parametri.
- I parametri si identificano con un criterio di “bontà”.

# Criterio di bontà di un modello - I.

Come si quantifica la bontà di un modello?

- Osservazione: poiché un modello realizza predizioni un criterio ragionevole è che le predizioni siano accurate.

$$\hat{y}_i = y_i \quad \Rightarrow \quad m(x_i) = y_i$$

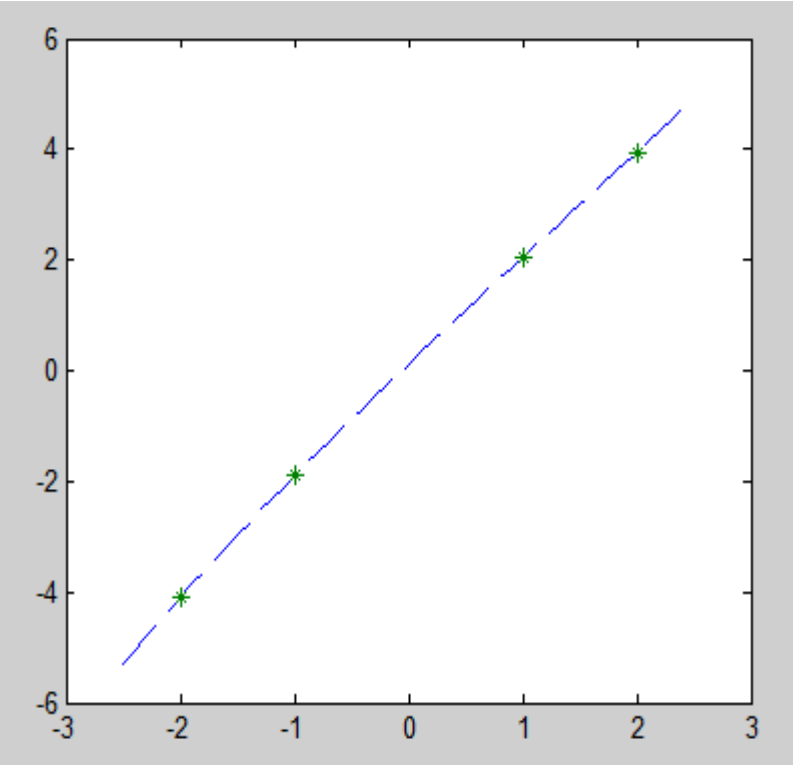
- Esempio 5: (errori di misura)

  $(x_1 = 1; y_1 = 2.05)$ ; $(x_2 = 2$ ; $y_2 = 3.95)$

  $(x_3 = -2$ ; $y_3 = -4.1)$; $(x_4 = -1$ ; $y_4 = -1.9)$

- Famiglia: polinomi
  - Polinomio interpolante

$$\hat{y}_i = 0.0125x_i^3 - 0.05x_i^2 + 1.9625x_i + 0.1250$$



# Funzione interpolante: osservazioni

- Si dimostra che dati $N$ punti la funzione interpolante ha (nel caso generale) grado $N$-$1$.
- Osservazione: per avere risultati attendibili si usano tanti dati
- Conseguenza: modello interpolante complesso.
- Osservazione: nel caso di errori di misura la funzione interpolante descrive anche il rumore (cosa che non vorrei)
- Conseguenza: si preferiscono modelli di grado basso
- Si dice che le variabili “regrediscono” a
  - Rette (retta di regressione)
  - Parabole (parabola di regressione)
- Considerazione: serve un nuovo criterio per individuare il modello migliore nella famiglia di modelli.

# Criterio di bontà di un modello - II.

- Dato un modello $m(x_i)$, definisco residuo

$$r_i = \hat{y}_i - y_i$$

- Osservazione: Un buon modello avrà dei residui non nulli (mi rappresentano l'errore di misura).
- Osservazione: Un buon modello avrà residui piccoli. (deve descrivere i dati)
- Proposta: i due risultati potrebbero essere ottenuti minimizzando la somma dei quadrati dei residui.

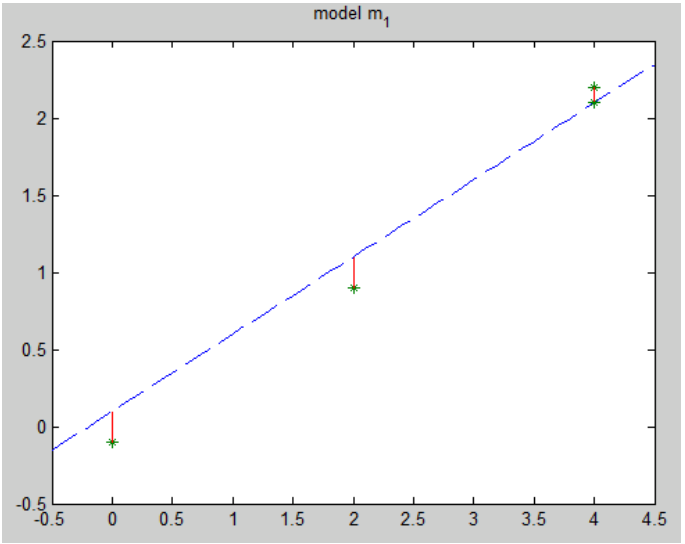
$$SSR = \sum_{i=1}^{N} \left( \hat{y}_i - y_i \right)^2$$

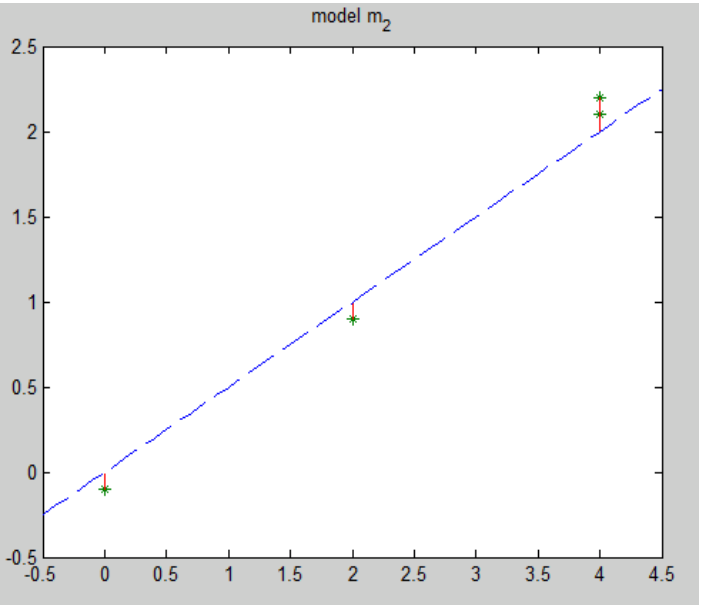
- SSR: sum squared residual

# SSR: esempio

- Esempio: Data la bi-variata in tabella
  - Considerare i modelli
    - $m_1 : \hat{y}_i = 0.5\, x_i + 0.1$
    - $m_2 : \hat{y}_i = 0.5\, x_i$
  - graficamente è $r_i$ è il segmento rosso
  - Il modello $m_2$ risulta migliore

| | | $m_1$ | | | $m_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $y_i$ | $m_1(x_i)$ | $r_i$ | $r_i^2$ | $m_2(x_i)$ | $r_i$ | $r_i^2$ |
| 0 | -0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.04 | 0 | 0.1 | 0.01 |
| 4 | 2.1 | 2.1 | 0 | 0 | 2 | 0.1 | 0.01 |
| 4 | 2.2 | 2.1 | -0.1 | 0.01 | 2 | 0.2 | 0.04 |
| 2 | 0.9 | 1.1 | 0.2 | 0.04 | 1 | -0.1 | 0.01 |
| Totali | | | 0.3 | 0.09 | | 0.3 | 0.07 |



# Retta di regressione.

- Tecnica che prevede
  - Modello di tipo affine $m_1 : \hat{y}_i = a\,x_i + b$
  - Parametri identificati rendendo minimo

$$SSR = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(a\,x_i + b - y_i\right)^2$$

  - In simboli $\arg\min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} \left(a\,x_i + b - y_i\right)^2$

- Si dimostra che $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ $\qquad b = \overline{y} - a\,\overline{x}$

- La minimizzazione della $SSR$ fu proposta da Gauss con il nome di metodo dei minimi quadrati.

# Retta di regressione: esempio

- Esempio 5: (errori di misura)

  $(x_1 = 1; y_1 = 2.05)$ ; $(x_2 = 2$ ; $y_2 = 3.95)$

  $(x_3 = -2$ ; $y_3 = -4.1)$; $(x_4 = -1$ ; $y_4 = -1.9)$

  - Da esercizio precedente

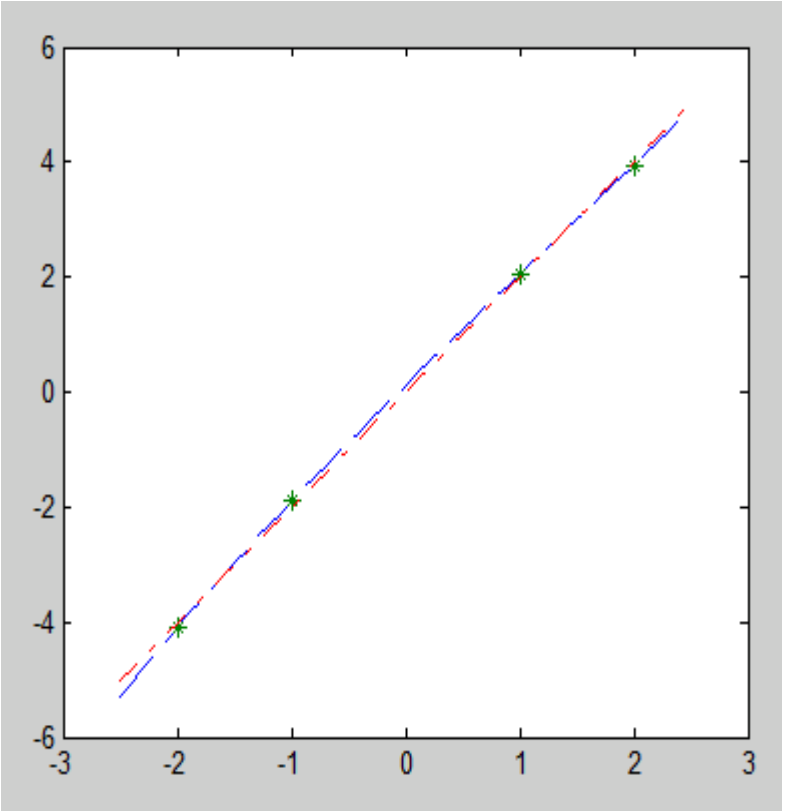
$$\bar{x} = 0 \qquad \bar{y} = 0 \qquad \sigma_{xy} = 5.0125$$

$$\sigma_x^2 = 2.5 \qquad \sigma_y^2 = 10.05625$$

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{5.0125}{2.5} = 2.005$$

$$b = \bar{y} - a\,\bar{x} = 0$$

  - retta di regressione $\hat{y}_i = 2.005\, x_i$
  - funzione interpolante $\hat{y}_i = 0.0125 x_i^3 - 0.05 x_i^2 + 1.9625 x_i + 0.1250$
  - legame vero $y_i = 2\, x_i + 0.5\, z_i$



# Retta di regressione: proprietà

- Sia $m(x)$ una retta di regressione, si dimostra che
  - $m$ passa sempre per la media della serie

$$\bar{y} = m(\bar{x})$$

  - La somma degli scarti è nulla

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{y}_i - y_i = \sum_{i=1}^{N} \left( a\, x_i + b - y_i \right) = 0$$

  - Se $y_i = a\, x_i + b$ (osservazioni disposte su una retta) allora
    - $m(x)$ è la retta interpolante
    - $SSR = 0$.

# Retta di regressione: validità

- Osservazione: date le osservazioni di una bivariata si può sempre calcolare la retta di regressione.

  Come verificare la bontà del modello ?

- Criterio grafico: disegnare la retta insieme al diagramma a dispersione

- Criterio numerico: calcolare il coefficiente di Pearson
  - $|R| < 0.3$ scarsa probabilità di legame
  - $0.3 < |R| < 0.7$ moderata probabilità di legame lineare
  - $0.7 < |R|$ ottima probabilità di legame lineare

# Ricapitolando - I

- Indici di posizione
  - Moda: modalità frequenza della serie maggiore
  - Media: unione delle medie delle modalità $\overline{S}=(\overline{X};\ \overline{Y})$
- Indici di variabilità
  - Covarianza (varianza congiunta)
    - $\sigma_{XY}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$
    - $\sigma_{XY}=\sum_{i=1}^{M_x}\sum_{j=1}^{M_y}(x_i-\overline{x})(y_j-\overline{y})f_{i,j}$
  - Matrice varianza/covarianza

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2\end{bmatrix}$$

# Ricapitolando - II

- Retta di regressione
  - Modello di tipo affine $m: \hat{y}_i = a\, x_i + b$
  - Parametri identificati rendendo minimo

$$SSR = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{y}_i - y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(a\, x_i + b - y_i\right)^2$$

  - Parametri $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ $b = \bar{y} - a\,\bar{x}$

- Indice di correlazione di Pearson

$$R = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}$$

  - Usato per verificare la presenza di un legame
    - $|R| < 0.3$ scarsa probabilità di legame
    - $0.3 < |R| < 0.7$ moderata probabilità di legame
    - $0.7 < |R|$ ottima probabilità di legame lineare