Appunti di Dinamica dei Sistemi di punti materiali.

Sistema discreto: Def. $S = \{ m_i \mid i = 1 \ldots N\}$

Sistema continuo: $S = \int_M dm = \int_V \rho(r)dV$, essendo $\rho(r) = dm/dV$.

Nota Bene: per il punto materiale valgono le relazioni:

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i$

$E_k = ½mv^2$, $\qquad dE_k = dW = \mathbf{F}_R(r) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$

$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ $\qquad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \wedge \sum_{i=1}^{k} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{\tau}_{O,i}$

Generalizzazione delle leggi e dei teoremi della dinamica del punto materiale ai sistemi di N ($N \geq 2$) punti materiali o particelle.

Equazione del moto della particella i–ma (*legge di Newton*):

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \qquad (1)$$

Forza risultante $\mathbf{F}_i^{(R)}$ agente sulla particella i–ma come risultante delle forze interne $\mathbf{F}_i^{(I)}$e delle forze esterne $\mathbf{F}_i^{(E)}$ al sistema S, dove:

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{j=1\,(j\neq i)}^{N} \mathbf{F}^{(i)}_{ij} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_{k=1}^{R} \mathbf{F}^{(e)}_{ik}$$

N.B.: Vale il principio di azione/reazione, per cui $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$.

In generale, l'equazione del moto della singola particella i–ma:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

risulterà essere un'equazione differenziale funzione di $(N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t)$ variabili, cioè 6N+1 incognite.

Per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in 6N+1 incognite (N$\mathbf{r}_i$+N$\mathbf{v}_i$+t).

Impossibilità di risolvere sistemi di 3N equazioni di Newton in 6N+1 incognite (N$\mathbf{r}_i$+N$\mathbf{v}_i$+t).

Cosa si può fare con i sistemi di punti materiali?
Descrizione del moto del sistema S nel suo complesso attraverso la definizione di grandezze dinamiche collettive, cioè di grandezze dinamiche riferite all'insieme di punti materiali del sistema S.

In tale modo si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, invece del moto individuale delle singole particelle.

Le grandezze dinamiche collettive del sistema S si ottengono mediante la "somma" delle grandezze dinamiche che caratterizzano il moto individuale delle singole particelle appartenenti al sistema S:

$\mathbf{F}_S^{(R)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(R)}$, $\mathbf{P}_S = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$, $E_{k,S} = \sum_{i=1}^{N} E_{k,i}$, $\mathbf{L}_{O,S} = \sum_{i=1}^{N} L_{O,i}$.

NB: Le grandezze dinamiche collettive del sistema S sono:

$$\mathbf{F}_S^{(R)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}_S^{(INT)} + \mathbf{F}_S^{(EXT)}$$

$$\mathbf{P}_S = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} (m_i \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_{i=1}^{N} E_{k,i} = \sum_{i=1}^{N} (\tfrac{1}{2} m_i v_i^2)$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_{i=1}^{N} L_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i)$$

E, analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di dare un senso alle relazioni seguenti, che sono riferite alle grandezze collettive del sistema di N punti materiali in considerazione:

$$d\mathbf{P}s/dt = \sum_1{}^N{}_i\, d\mathbf{p}_i/dt = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(R)} = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(I)} + \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(E)}$$

$$dE_{k,S} = dW_S = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(R)} \cdot d\mathbf{r}$$

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i{}^{(R)} = \sum_1{}^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{O,\,i}{}^{(R)}$$

<u>Calcolo della risultante</u> di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sugli N punti materiali del sistema S:

$$\mathbf{F}_S{}^{(R)} = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(R)} = \sum_1{}^N{}_i\, [\mathbf{F}_i{}^{(I)} + \mathbf{F}_i{}^{(E)}] =$$

$$= \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(I)} + \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

essendo $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ a causa del principio di azione–reazione ($\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$). Infatti: $\sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(I)} = \sum_1{}^N{}_i\, [\sum_1{}^N{}_j\, \mathbf{F}_{ij}] = \sum_1{}^N{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$.
cioè $\mathbf{F}_S{}^{(R)} = \mathbf{F}_S{}^{(EXT)}$

<u>Verifica</u>: $\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1{}^N{}_i\, \mathbf{F}_i{}^{(I)} = \sum_1{}^N{}_i\, [\sum_1{}^N{}_j\, \mathbf{F}_{ij}] = \sum_1{}^N{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$

– Per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ si ha infatti:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1{}^2{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (-\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

= Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1{}^3{}_{ij\,(j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (-\mathbf{F}_{12}) + \mathbf{F}_{23} + (-\mathbf{F}_{13}) + (-F_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

In definitiva la risultante di tutte le forze agenti sul sistema S di N punti materiali in considerazione, sarà:

$$\mathbf{F}_S^{(R)} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}_S^{(EXT)},$$

E quindi, in base all'eq. (2) si avrà anche:

$$d\mathbf{Ps}/dt = \sum_1^N{}_i\, d\mathbf{p}_i/dt = \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

o anche, partendo dall'eq. (1) e sommando su tutte le N particelle:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} \equiv \mathbf{F}_S^{(R)}$$

dove si è fatto tenuto conto del fatto che: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{F}^{(INT)} = \mathbf{0}$

In definitiva, la risultante $\mathbf{F}_S^{(R)}$ di tutte le forze (interne+esterne) agenti sul sistema di N punti materiali è data dalla risultante $\mathbf{F}^{(EXT)}$ delle <u>sole forze esterne</u> che agiscono sulle particelle del sistema S.

Tale risultante delle forze esterne $\mathbf{F}_S^{(R)} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)}$ <u>è formalmente identica</u> alla risultante($\mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i\, \mathbf{F}_i$) delle forze agenti su una particella, per cui vale la legge di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{(R)}$.

E' pensabile di trattare il sistema S come una super particella, per cui si possa scrivere una relazione formalmente equivalente della II legge della dinamica del punto materiale ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)?

La risposta è sì, purché venga prima specificata la massa di tale superparticella e, soprattutto il significato della sua accelerazione.

Per la massa del sistema non c'è problema, si farà riferimento alla massa totale del sistema di N punti materiali, cioé $M_S = \sum_1^N{}_i\, m_i$.

Per l'accelerazione della super-particella di massa M_S intenderemo l'accelerazione "media" $\langle\mathbf{a}\rangle$ del sistema S, ottenuta dalla media ponderata delle accelerazioni $\mathbf{a}_i$ delle particelle individuali, ossia
$\langle\mathbf{a}\rangle = \sum_1{}^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i \ / \ \sum_1{}^N{}_i\ m_i$.

Vedremo qui di seguito che l'accelerazione "media" così definita corrisponde all'accelerazione del "centro di massa" del sistema di N punti materiali, che coincide con il baricentro del sistema S.

Centro di massa di un sistema di particelle.

Definizione e proprietà: Posizione del CM

$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i \,/ \sum_1{}^N{}_i\, m_i$ (N.B.: $M_S = \sum_1{}^N{}_i\, m_i$)

($x_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, x_i\, /M_S$, $y_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, y_i\, /M_S$, $z_{CM} = \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, z_i\, /M_S$)

Nel caso di sistemi discreti si ha in pratica: $M_S\mathbf{r}_{CM} = \sum_i m_i\, \mathbf{r}_i$.

N.B. Il CM è una proprietà intrinseca del sistema.
La sua posizione quindi è indipendente da Oxyz, mentre le sue coordinate dipendono dalla scelta del sistema Oxyz:

– Il caso di due particelle a distanza *d* l'uno dall'altra:

Sistema O′x′ tale che m_1 si trovi in O′ e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1\, 0 + m_2\, d] \,/\, [m_1 + m_2] = m_2\, d/[m_1 + m_2]$$

Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1\, x_1 + m_2\, x_2] \,/\, [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1\, x_1 + m_2\, (x_1 + d)] \,/\, [m_1 + m_2] \\ &= x_1 + m_2\, d/(m_1+m_2) \\ &= x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_{CM}$

Proprietà distributiva del CM:

Il centro di massa di due sistemi di particelle $S = \{m_j \mid j = 1 \ldots N_1\}$ e $S' = \{ m_k \mid k = 1 \ldots N_2\}$ corrisponde al CM di due particelle aventi massa uguale alle masse totali M_1 e M_2 dei due sistemi e poste nel centro di massa di ciascun sistema:

Dimostrazione:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^{N1+N2}{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_1^{N1+N2}{}_i\, m_i$$
$$= [\sum_1^{N1}{}_j\, m_j\, \mathbf{r}_j + \sum_1^{N2}{}_k\, m_k\, \mathbf{r}_k]/[\sum_1^{N1}{}_j\, m_j + \sum_1^{N2}{}_k\, m_k] =$$
$$= [M_1\, \mathbf{r}_{CM,1} + M_2\, \mathbf{r}_{CM,2}]/[M_1 + M_2]$$

Centro di massa di sistemi continui.

Un sistema continuo e omogeneo avente forma geometrica regolare ha il CM coincidente con il baricentro della figura, e tale punto si trova sull'intercetta dei suoi assi di simmetria principali.

Utilità della proprietà distributiva nel calcolo del CM di un sistema continuo fatto di due figure geometriche regolari.

N.B.: il centro di massa di un sistema di particelle coincide con il punto di massima simmetria del sistema. Nel caso di un sistema continuo esso coincide con il baricentro del sistema.

Esempi di calcolo: semi–disco, semi–sfera e semi–anello.

Semi–disco: $y_{CM} = 4R/3\pi$;

Semi–sfera: $z_{CM} = 3R/8$;

Semi–anello: $y_{CM} = 2R/\pi$;

Guscio semi–sferico: $z_{CM} = R/3$;

Cono: $z_{CM} = h/4$ (distanza misurata dalla base).

Velocità e accelerazione del CM:

1) $\mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$ $\quad (v_{X,CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\ \mathbf{v}_{xi} / M_S$, etc.)

2) $\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\ \mathbf{a}_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$ $\quad (a_{X,CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ a_{xi} / M_S$, etc.)

In alternativa $\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{a}_{CM}$ si ottengono da $M\ \mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{r}_i$:

1') $M\ \mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i$ direttamente da $M d\mathbf{r}_{CM}/dt = \sum_1^N{}_i\, m_i\ (d\mathbf{r}_i/dt)$

2') $M\ \mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i$ direttamente da $M d\mathbf{v}_{CM}/dt = \sum_1^N{}_i\ m_i\ (d\mathbf{v}_i/dt)$

Leggi cardinali della dinamica dei sistemi di punti materiali:

Sistema S isolato: i.e., quando non agiscono forze esterne: $\mathbf{F}_{ik} = 0$.

Evidenze sperimentali: per un sistema S isolato si ha la:
- conservazione della quantità di moto totale: $\mathbf{P}_S$ = costante
- conservazione del momento della quantità di moto del sistema: $\mathbf{L}_{O,S} =$ costante.

N.B.: Si tratta di un fatto sperimentale.

$\mathbf{P}_S = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \text{cost};$

$\mathbf{L}_{O,S} = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i = \text{costante!}$

Conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato (sul quale non agiscono forze esterne):

$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S =$ costante. (evidenza sperimentale)

Esempio di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne;

Conservazione di una delle componenti della quantità di moto totale del sistema isolato:

$$Mv_{CM,X} = P_{S,X.}$$

I casi in cui si conserva una sola componente:

– granata che esplode in aria;

– uomo che si sposta su una piattaforma posta su un piano liscio;

– moto di un corpo di massa m su un cuneo di massa M appoggiato a un piano orizzontale liscio: $0 = m\, v_x + M\, V_x$.

Sistema di punti materiali non–isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \quad \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{non è più costante, ma } \mathbf{P}_S(t)$$

Relazione la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze agenti sulle particelle dei sistema.

$$d\mathbf{P}_S/dt = d(\sum_1^N{}_i\, \mathbf{p}_i)/dt = \sum_1^N{}_i\, (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(R)}$$

$$= \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)} \equiv \mathbf{F}_S^{(R)}$$

essendo $F^{(INT)} = 0$ per il principio di azione–reazione.

Quindi: $$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)}$$

$\Rightarrow$ I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi in un sistema di riferimento inerziale o del laboratorio (sistema L).

Tale legge si può anche scrivere come: $M_S\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \quad \text{o equivalentemente} \quad \Rightarrow \quad M_S\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Esiste una seconda legge (II legge cardinale) della dinamica di sistemi che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S al momento delle forze esterne rispetto ad O.

⇒ II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

1) Sistema isolato: sappiamo che il $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva:

$\mathbf{L}_{O,S}$ = costante $\Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i$ = costante!

In tal caso il teorema del momento angolare dà $d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_i d\mathbf{L}_{O,i}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

ma dato che non ci sono forze esterne $\mathbf{F}_{ik} \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$, si avrà pure:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{Oi}^{(I)} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

Sistema isolato: risultante dei momenti delle forze interne = 0,

N.B.: $\sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

Infatti per un sistema di due particelle (sietema a due corpi):

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

mentre, per un sistema di tre particelle si avrà:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

2) Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{OS}/dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = =\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

essendo, come abbiamo visto $\sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Sistema L: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II[a] legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Le leggi ricavate più sopra valgono in un sistema Oxyz,t (L)

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ e il momento risultante dei momenti delle forze interne $\boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = 0$. Cioè:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = 0; \qquad \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = 0).$$

Sistema C: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi

Sistema C: Sistema di riferimento del centro di massa.

Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi cartesiani paralleli agli assi x,y,z di Oxyz.

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

Calcolo delle grandezze dinamiche: $\mathbf{P}'_S$, $E'_{S,k}$ e $\mathbf{L}'_{CM}$.

$\mathbf{P}'_S = \sum_1^N{}_i \mathbf{p}'_i = \sum_1^N{}_i m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i E'_{k,i} = ½ \sum_1^N{}_i m_i v'^2_i = ½ \sum_1^N{}_i (p'^2_i/m_i)$

$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$

Sistema C = sistema a quantità di moto totale nulla:

$\mathbf{P}'_S = 0$ (con dimostrazione).

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, ma …

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (anche se CM è in moto non uniforme).

Energia meccanica di un sistema di punti materiali.

Resta da vedere l'energia come grandezza dinamica collettiva di un sistema di punti materiali S.

Cosa succede dell'energia di un sistema di punti materiali?

Relazione fra la variazione dell'energia cinetica totale del sistema S e il lavoro delle forze interne ed esterne al sistema di particelle.

Energia cinetica di un sistema S:

Nel sistema del laboratorio L, ancorato ad un punto fisso O:

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i E_{k,i} = \sum_1^N{}_i (½\, m_i\, v_i^2).$$

Nel sistema del centro di massa C, ancorato al CM del sistema S:

$$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i E'_{k,i} = \sum_1^N{}_i (½\, m_i\, v'^2_i).$$

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$

Lavoro delle forze agenti su un sistema di particelle S.

Definizione di lavoro elementare delle:

– forze interne: $dW^{INT} = \sum_1^N{}_i dW^{(I)}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} \bullet d\mathbf{r}_i$;

= forze esterne: $dW^{EXT} = \sum_1^N{}_i dW^{(E)}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} \bullet d\mathbf{r}_i$.

Il lavoro elementare totale delle forze interne e delle forze esterne:

$$dW = dW^{EXT} + dW^{INT}.$$

Il teorema dell'energia per un sistema di particelle si scrive:

$$dE_{k,S} = dW^{EXT} + dW^{INT}$$

In termini finiti si scriverà:

$$\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} + W^{INT}.$$

Se le forze interne sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale delle forze interne:

$E_P^{INT} = ½\sum_{i,j}^{(i\neq j)} E_{p,int}(\mathbf{r}_{ij})$, con $E_{p,}^{int}(\mathbf{r}_{ij}) = \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r}_{ij})\bullet d\mathbf{r}_{ij}$, e $dE_P^{INT} = -½\sum_{ij} \mathbf{F}^{(i)}(r_{ij})\bullet d\mathbf{r}_{ij}, = -\sum_1^N{}_i\, dWi^{(i)} = -dW^{INT}$.

Pertanto:

$$\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} - \Delta E_P^{INT},$$

ossia:

$$\Delta E_{k,S} + \Delta E_P^{INT} = W^{EXT}$$

Def. di Energia propria di un sistema S: $U_S = E_{k,S} + E_P^{INT}$.

Vale la relazione $\Delta(E_{k,S} + E_P^{INT}) = W^{EXT}$, ossia $\Delta U_S = W^{EXT}$

Se anche le forze esterne sono conservative, e quindi si può definire un’energia potenziale delle forze esterne:

$$dE_P^{EXT} = -\sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)}\bullet d\mathbf{r}_i = -\sum_1^N{}_i\, dWi^{(E)} = -dW^{EXT},$$

allora si potrà scrivere: $\Delta U = -\Delta E_P^{EXT}$, e quindi $\Delta(U + E_P^{EXT}) = 0$, cioè:

$$\Delta E_{T,S} = 0,$$

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$.

Conservazione della Energia totale meccanica $E_{T,S}$ di un sistema S di particelle soggette all'azione di sole forze conservative: $E_{T,S} = U + E_p^{(EXT)}$ = costante del moto.

Esempio: Due corpi puntiformi collegati fra loro da una molla in moto nel campo di forza gravitazionale della terra.

N.B.: Dipendenza dell'energia cinetica dal sistema di riferimento scelto, e indipendenza dell'energia E_P^{INT} dal sistema scelto.

Nel sistema C, ancorato al CM: $E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna o intrinseca $E_{k,S}^{INT}$ e la somma $E_{k,S}^{INT} + E_{k,S}^{INT} = (E_{k,S}+E_P)^{INT} = U_S^{INT}$, che è chiamata anche energia interna.

Teoremi di Konig

Relazioni fra le grandezze dinamiche collettive (quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica) misurate nel sistema del laboratorio (sistema L) e del CM di S (sistema C):

Teoremi di Konig: della quantità di moto, del momento della quantità di moto, e dell'energia cinetica.

– quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M\mathbf{v}_{CM}$.

N.B.: Dimostrazione:

$$\mathbf{P}_S = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = \sum_i m_i (\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = (\sum_i m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_i m_i\mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}_{CM}$$

– momento angolare: $\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

N.B.: Dimostrazione:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_i) \wedge m_i(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) =$$
$$\sum_i \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$$
$$= \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_i m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$$

Perché si ha che: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}_{CM} = (\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{r}'_i) \wedge \mathbf{v}_{CM} = 0$
e così pure che: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}'_i) = 0$.

–dell'energia cinetica: $E_{k,S} = ½\, M v_{CM}^2 + E_{k,S}' = E_{k,CM} + E_{k,INT}$

Dimostrazione:
$E_{k,S} = = \sum_i E_{k,i} = ½ \sum_i m_i v_i^2 = ½ \sum_i m_i\, \mathbf{v}_i \bullet \mathbf{v}_i = ½ \sum_i m_i$
$(\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) \bullet (\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i) = ½ \sum_i m_i\, v_{CM}^2 + \sum_i m_i\, \mathbf{v}'_i \bullet \mathbf{v}_{CM} + ½ \sum_i m_i\, v'^2_i = ½$
$M v_{CM}^2 + E_{k,S}'$.

Dal momento che è: $\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}'_i \bullet \mathbf{v}_{CM} = (\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}'_i) \bullet \mathbf{v}_{CM} = 0$.

Teoremi di Konig: Scomposizione del moto di un sistema S di punti materiali nel moto orbitale del centro di massa del sistema rispetto al punto O, e nel moto intrinseco o interno delle particelle del sistema rispetto al CM del sistema S.

Esempi: moto della luna attorno alla terra = moto orbitale di un punto materiale di massa $M_S = M_T + M_L$ con velocità v_{CM} + moto intrinseco rispetto al CM del sistema, indipendente dal sistema di riferimento usato per l'osservazione.

Sistema a due corpi: massa ridotta.

Problema dei due corpi: moto relativo di due particelle soggette unicamente alla loro mutua interazione, può essere espresso come:

$$\mu \mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Def. massa ridotta del sistema: $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$.

E' la legge di Newton di una particella di massa μ sotto l'azione di una forza F_{12} riferito al SRI ancorato nel CM del sistema.

Espressione dei teoremi di Konig per un sistema a due corpi.

– Quantità di moto nel sistema C:

$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = 0$, dato che $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$, e $\mathbf{v}_1' = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$,

Si avrà anche:
$\mathbf{p}_1' = m_1\mathbf{v}_1' = m_1 m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) = \mu\, \mathbf{v}_{12}$
e $\mathbf{p}_2' = m_2\mathbf{v}_2' = m_2 m_1 \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) = \mu\, \mathbf{v}_{21} = -\mu\, \mathbf{v}_{12}$.

Quindi: $p' = p_1' = p_2' = \mu\, v_{12}$.

– Energia cinetica interna di un sistema di 2 particelle:

$$E_{k,INT} = \tfrac{1}{2}\mu\, v_{12}^2 = p'^2/2\mu.$$

– Momento angolare interno:

$$\mathbf{L}_{CM,INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12} .$$

Cosa succede quando $m_1 << m_2$ (atomo di idrogeno; sistema satellite-pianeta etc.) e cosa si può fare in generale in termini della massa ridotta μ.

Esempio: caso del manubrio costituito da 2 corpi puntiformi collegati da un'asta rigida lunga L e priva di massa, calcolo:

– dell'energia cinetica interna: $E'_{k,S} = \tfrac{1}{2}\, \mu\, v_{12}^2 = \tfrac{1}{2}\, \mu\, (L\omega)^2$

– del momento angolare intrinseco: $\mathbf{L}'_{CM} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu \mathbf{v}_{12} = \wedge \mu\, L^2 \boldsymbol{\omega}$

– della tensione della asta come forze interna la sistema:
$T = \mu\, v_{12}^2/r_{12} = \mu\, v_{12}^2/L = \mu\, L\omega^2$