Diario del corso di Analisi Matematica 3

G. Orlandi

a.a. 2012-13

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 2/10/12 (2 ore). Introduzione al corso. Richiami sui numeri complessi: parte reale, parte immaginaria, somma, prodotto, coniugio, prodotto scalare, modulo, argomento, argomento principale, rappresentazione cartesiana $z \equiv a + ib$, $i^2 = -1$, matriciale $z \equiv aI + bJ$, $J^2 = -I$ mediante le trasformazioni lineari conformi del piano che preservano l'orientazione, rappresentazione polare $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Radici e formula di De Moivre. Funzioni complesse $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: si adottano le notazioni rettangolare $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u, v : A \to \mathbb{R}$. In virtù della relazione $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, si pone anche $f(x + iy) = f(z, \bar{z}) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ (rappresentazione con le variabili coniugate). Limiti e continuità per funzioni complesse. Funzioni elementari.

Lezione del 4/10/12 (2 ore). Funzioni elementari: polinomi, funzioni razionali. Esponenziale complesso e^z. Funzioni trigonometriche complesse $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Il logaritmo complesso $\log z = \log |z| + i \arg(z)$. Logaritmo principale. La funzione potenza complessa $z^c = e^{c \log z}$.

Differenziabilità (in senso reale) per $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$, matrice Jacobiana, invertibilità locale. Esempio: la funzione $f(z) = z^2$. Derivabilità in senso complesso, funzioni olomorfe. Regole di derivazione, derivabilità delle funzioni elementari. Anello delle funzioni olomorfe. Matrice Jacobiana di funzioni olomorfe, equazioni di Cauchy-Riemann.

Interpretazione geometrica delle equazioni di Cauchy-Riemann: se $f = u+iv$ allora C-R implica $|\nabla u| = |\nabla v|$ e $\nabla v \perp \nabla u$ (ossia gli insiemi di livello di u sono ortogonali a quelli di v), e la matrice jacobiana $Df = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial v}{\partial x} J$ è una trasformazione conforme (nella rappresentazione matriciale dei numeri complessi, si ha $Df \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'$, per cui detto $\theta = \arg f'$, Df risulta essere la composizione di una rotazione antioraria di angolo θ e di una dilatazione di ampiezza $|f'|$), che preserva l'orientazione su $\mathbb{R}^2$ (ossia $\det Df = |f'| \geq 0$). Inoltre, il rango di Df è 2 (e in tal caso f è localmente invertibile) oppure 0.

Lezione del 9/10/12 (2 ore). Equazioni di Cauchy-Riemann e derivabilità in senso complesso: condizioni necessarie e sufficienti. Equazioni di Cauchy-Riemann rispetto alle variabili coniugate $z, \bar{z}$: si scrivono $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (dove si è posto $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$), ossia una funzione olomorfa si deve poter esprimere esplicitamente in funzione della sola z.

Osservazione: le funzioni tali che $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sono dette *antiolomorfe*, sono le coniugate di funzioni olomorfe, e soddisfano a proprietà analoghe a quelle delle funzioni olomorfe.

Funzioni olomorfe e funzioni armoniche: se $f = u + iv$ è olomorfa allora u e v sono funzioni armoniche, ossia vale $\mathrm{tr} D^2 u \equiv \Delta u = \Delta v = 0$, dove $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ è l'operatore di Laplace o Laplaciano in due dimensioni. In particolare v è detta l'armonica coniugata di u. Determinazione dell'armonica coniugata di una funzione armonica data. Soluzione fondamentale del Laplaciano in due dimensioni: è la funzione $\log(x^2 + y^2)$, parte reale della funzione $\log z$, olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Rappresenta il potenziale generato da una carica puntiforme posta nell'origine (o meglio, il potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo uniformemente carico in $\mathbb{R}^3$), ed è un ingrediente essenziale nella costruzione di soluzioni dell'equazione di Laplace non omogenea $\Delta u = g$, dove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione data.

Breve digressione sull'equazione di Laplace: si tratta di un'equazione alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine di tipo ellittico (quella delle onde è di tipo iperbolico, quella del calore è di tipo parabolico) che interviene nella descrizione di fenomeni in situazioni di equilibrio: distribuzioni stazionarie di temperatura, concentrazioni di sostanze chimiche, potenziale elettrostatico (rispettivamente gravitazionale) in una regione in cui non vi sono cariche (risp. masse), descrizione euleriana del campo di velocità di un fluido incompressibile irrotazionale. Vi è anche un'interpretazione probabilistica legata ad alcuni importanti processi stocastici (ad es. il moto browniano).

Lezione dell'11/10/12 (2 ore). Richiami sulle serie di potenze complesse. Raggio e cerchio di convergenza, convergenza totale (e quindi uniforme) in ogni cerchio chiuso incluso nel cerchio di convergenza. Definizione dell'esponenziale complesso mediante sviluppo in serie di potenze complesse. Teorema di derivazione per le serie di potenze complesse e regolarità C^ω (analitica). Funzioni analitiche complesse. Le funzioni analitiche complesse sono olomorfe nel loro dominio di definizione. Enunciato del teorema fondamentale dell'analisi complessa: le funzioni olomorfe sono analitiche.

Lezione del 16/10/12 (2 ore). Il problema di trovare un dominio di definizione "naturale" per le funzioni inverse delle funzioni elementari: superfici di Riemann a più fogli. Superficie di Riemann della radice k-esima e del logaritmo. Nozione intuitiva di superficie di Riemann come varietà analitica complessa (ossia ogni punto della superficie ammette un intorno aperto identificato ad un aperto di $\mathbb{C}$ mediante una applicazione olomorfa). Sfera di Riemann. Identificazione della sfera di Riemann con la compattificazione $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La sfera di Riemann come dominio "naturale" per le funzioni meromorfe, ossia $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfe. Identificazione di $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con una sfera di $\mathbb{R}^3$ via proiezione stereografica. Identificazione della sfera di Riemann via due fogli (carte) ed il cambio di coordinate (olomorfo) $z \mapsto z^{-1}$. Identificazione con lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^1$, definito in coordinate omogenee da

$\mathbb{CP}^1 = \{[z,w],\ (z,w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$, dove $[z,w] = [\lambda \cdot z, \lambda \cdot w]$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Le carte coordinate $z \mapsto [z,1]$ e $w \mapsto [1,w]$, con la trasformazione di coordinate $w = z^{-1}$, costituiscono un atlante di $\mathbb{CP}^1$ che viene cosìidentificato alla sfera di Riemann.

Integrali di cammino per funzioni complesse. Data $f : A \subset \mathbb{C} \to C$ continua e $\Gamma \subset A$ una curva semplice di classe C^1 a tratti (o più in generale, una curva continua *rettificabile*, ovvero di lunghezza finita) parametrizzata da $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$, si definisce

$$\int_\Gamma f(z)dz := \lim_{|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=0}^{N} f(z_k) \cdot \Delta z_k ,$$

dove $\cdot$ è il prodotto complesso, $z_0, ..., z_N$ individuano una partizione di Γ e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Nelle ipotesi di cui sopra il limite delle somme di Riemann esiste e quindi l'integrale è ben definito. Vale inoltre $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)dt$. Se $f = u + iv$ e $z = x + iy$ si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy + i \int_\Gamma udy + vdx$. Definiamo il campo di vettori $\vec{E} = (u, -v)$. Detto τ il versore tangente a Γ e ν il versore normale (rotazione oraria di τ), si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma < \vec{E}, \tau > d\ell \ - i \int_\Gamma < \vec{E}, \nu > d\ell$.

Lezione del 18/10/12 (2 ore). Proprietà degli integrali di cammino: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione), linearità rispetto ad f, additività rispetto alla curva. Definizione di lunghezza di una curva continua come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali associate ad partizioni finite della curva. Per gli integrali di cammino vale la maggiorazione

$$\left| \int_\Gamma f(z)dz \right| \le \int_\Gamma |f(z)|\, |dz| \le \sup_A |f| \int_a^b |\dot\gamma(t)|dt = ||f||_{L^\infty(A)} |\Gamma|,$$

dove $|\Gamma|$ indica la lunghezza della curva $\Gamma \subset A$.

Curve semplici, chiuse, curve di Jordan. Teorema delle curve di Jordan: detta $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva continua, semplice, chiusa, esistono $A, B \subset \mathbb{R}^2$ aperti, tali che $\Gamma = \partial A = \partial B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \cup \Gamma = \mathbb{R}^2$. Tali aperti sono detti l'esterno (quello dei due non limitato) e l'interno di Γ.

Teorema fondamentale del calcolo per integrali di cammino: se $f = g'$, allora $\int_\Gamma f(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$. In particolare, $\oint_\Gamma g'(z)dz = 0$ per ogni curva Γ chiusa.

Richiami sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$: una 1-forma $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ si dice *esatta* se $\omega = du$, per qualche funzione $u(x,y)$, dove $du = u_x dx + u_y dy$ ne indica il differenziale. Si introduce un prodotto anticommutativo $\wedge$ sulle 1-forme (associativo, lineare, distributivo rispetto alla somma) ed un operatore d (differenziale esterno) definito da $d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy = (-a_y + b_x) dx \wedge dy$. Se $d\omega = 0$ la forma si dice *chiusa*. Ogni forma esatta è chiusa, il viceversa è sicuramente vero su domini semplicemente connessi. Forme esatte sono associate a campi vettoriali conservativi, forme chiuse a campi irrotazionali. In generale, le forme differenziali sono oggetti naturali rispetto all'integrazione orientata (su curve, superfici,...). Teorema di Stokes (Gauss-Green) per forme differenziali di classe C^1: $\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$, dove le orientazioni di ∂D e D sono legate tra loro dalla regola della mano destra.

Proposizione: f olomorfa $\Rightarrow$ la forma differenziale complessa $f(z)dz = (u+iv)(dx+idy)$ è chiusa. Infatti, se f è olomorfa, che $f(z)dz = udx - vdy + i(udy + vdx)$ sia chiusa segue dalle equazioni di Cauchy-Riemann. Nelle variabili coniugate $z, \bar{z}$ si ha in particolare $d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$.

Teorema di Cauchy-Goursat: $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow$ per ogni curva di Jordan $\Gamma = \partial D$ di classe C^1 a tratti (o più in generale, rettificabile), con $D \subset A$ si ha $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$. Dimostrazione nel caso f di classe C^1: per il Teorema di Stokes per forme (o per le formule di Gauss-Green nel piano), $\oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$ poichè $f(z)dz$ è chiusa.

Lezione del 23/10/12 (2 ore). Lemma di Goursat in un triangolo, estensione al caso di una poligonale semplice chiusa ed infine al caso di curve C^1 a tratti (o rettificabili) semplici chiuse. Estensione al caso di contorni di domini non semplicemente connessi, il cui bordo sia costituito da più curve semplici chiuse disgiunte. Integrale di $(z-a)^{-1}$ lungo una circonferenza di centro $a \in \mathbb{C}$. Formula integrale di Cauchy e conseguenze: analiticità delle funzioni olomorfe.

Lezione del 25/10/12 (2 ore). Conseguenze della formula integrale di Cauchy. Le derivate delle funzioni olomorfe sono olomorfe. Il limite uniforme di funzioni olomorfe è olomorfo. Formula integrale e stime di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa. Proprietà della media $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$, teorema del massimo modulo: se $|f(z)| = \sup_B f$ con z interno a B aperto connesso, con $\bar{B}$ contenuto nel dominio di f, allora f è costante nella componente connessa del dominio contenente B: altrimenti detto, $\sup_B |f| = \sup_{\partial B} |f|$ per f olomorfa. Teorema di Liouville.

Lezione del 30/10/12 (1 ora). Teorema fondamentale dell'algebra. Teorema degli zeri delle funzioni olomorfe. Ordine di uno zero. Principio di continuazione analitica ed applicazioni.

Lezione del 6/11/12 (2 ore). Teorema di Morera. Classificazione delle singolarità isolate di una funzione olomorfa: singolarità eliminabili, singolarità essenziali, poli. Ordine di un polo. Esempi di funzioni con singolarità eliminabili, poli, singolarità essenziali. Sviluppi in serie di Laurent, unicità dello sviluppo in una corona fissata. Residuo. Formula dei residui.

Lezione dell' 8/11/12 (2 ore). Calcolo dei residui nel caso di singolarità essenziali. Alcuni metodi di calcolo dei residui per singolarità di tipo polo.

Lezione del 13/11/12 (2 ore). Residuo all'infinito. Teorema globale dei residui. Integrali di funzioni razionali di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ su $[0, 2\pi]$. Calcolo di integrali impropri su $\mathbb{R}$.

Lezione del 15/11/12 (2 ore). Lemma del (l'arco di) cerchio grande. Lemma di Jordan e applicazioni al calcolo di trasformate di Fourier. Integrali nel senso del valor principale. Lemma del cerchio piccolo per funzioni con poli semplici reali.

Lezione del 20/11/12 (2 ore). Trasformata di Fourier della funzione seno cardinale $\frac{\sin x}{x}$. Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} x^{-p} f(x)\, dx$ con $0 < p < 1$ e del tipo $\int_0^{+\infty} f(x) \log x\, dx$ (singolarità in un punto di ramificazione). Funzioni con infinite singolarità isolate e applicazioni al calcolo della somma di serie numeriche.

Lezione del 22/11/12 (2 ore). Indice di avvolgimento. Principio dell'argomento, significato geometrico. Applicazioni: teorema di Rouché, determinazione del numero di radici di un polinomio in una data regione. Teorema di Hurwitz.

Lezione del 27/11/12 (2 ore). Esercizi sul principio dell'argomento. Formula integrale di Cauchy e teorema dei residui per circuitazioni lungo curve chiuse (non necessariamente di Jordan). Teorema dell'applicazione aperta.

Dimostrazione: sia f olomorfa e non costante su un aperto connesso A, allora se $B \subset A$ è aperto e $z_0 \in B$, detto $w_0 = f(z_0)$ si ha, in un disco $B_r(z_0) \subset B$, la rappresentazione $f(z) = w_0 + (z - z_0)^k h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$, per un certo $k \geq 1$. Dato che $|h(z_0)| \neq 0$, supponendo senza perdita di generalità che $\mathrm{Arg}\,(h(z_0)) \neq \pi$ (altrimenti basta considerare la funzione $-f(z)$), dove Arg indica l'argomento principale ($-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$) risulta ben definita in un intorno $B_{r'}(z_0)$ di z_0 con $r' \leq r$ l'applicazione

$$g(z) = |h(z)|^{\frac{1}{k}} \exp \left[\frac{i\, \mathrm{Arg}\,(h(z))}{k} \right] ,$$

per cui in $B_{r'}(z_0)$ si può scrivere

$$f(z) = w_0 + [m(z)]^k , \qquad \text{con } m(z) = (z - z_0) \cdot g(z) .$$

Inoltre l'applicazione $m(z)$ risulta invertibile (e quindi aperta) in un intorno $B_{r''}(z_0)$ con $r'' \leq r'$ per il teorema della funzione inversa, dato che $m'(z_0) = g(z_0) \neq 0$. Dato che anche l'applicazione $\zeta \mapsto \zeta^k$ è aperta, si ha che l'immagine di $B_{r''}(z_0)$, contenuta in $f(B)$, è un aperto contenente w_0, ovvero w_0 è punto interno di $f(B)$. $\square$

Lezione del 29/11/12 (2 ore). Trasformazioni conformi nel piano. Relazione con le funzioni olomorfe. Proprietà: conservazione delle frontiere. Il Teorema di Riemann di classificazione conforme degli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ (o della sfera di Riemann). Condizioni per l'unicità di una trasformazione conforme tra due aperti semplicemente connessi conformemente equivalenti al disco unitario: condizione dei tre punti di frontiera, condizione sul punto interno e sull'argomento della derivata in quel punto. Trasformazioni di Möbius, omomorfismo con $GL_2(\mathbb{C})$. Proprietà: trasformazione di circonferenze in circonferenze, trasformazione di coppie di punti inversi rispetto ad una circonferenza in coppie di punti inversi rispetto alla circonferenza immagine.

Lezione del 4/12/12 (2 ore). Esempi di trasformazioni di Möbius: trasformazioni del disco unitario in sè, trasformazione del disco unitario in un semipiano.

Trasformazione di Schwarz-Christoffel (trasforma un semipiano in un poligono): dati $a_1 < a_2 < ... < a_n \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha_1, ..., \alpha_n < 1$ con $\sum_i \alpha_i = n-2$, si pone

$$f(z) = c_1 + c_2 \int_{\Gamma_{0,z}} (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (\xi - a_n)^{\alpha_n - 1} d\xi \,,$$

dove per $\Gamma_{0,z}$ si può scegliere ad esempio il segmento di estremi 0 e z. La trasformazione è conforme tranne nei punti a_i, dove la derivata si annulla. Dato che per $|\xi| \to +\infty$ l'integranda è maggiorata da $C|\xi|^{-2}$, si ha $|f(\infty)| < +\infty$, e in particolare l'immmagine dell'asse reale è un insieme limitato. Inoltre, dall'espressione per $\log(f'(z))$ si ricava $\arg f'(z) = \arg c_2 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) \cdot \arg(z - a_i)$. In particolare, dato che $\arg(x - a_i) = \pi$ se $x < a_i$ e $\arg(x - a_i) = 0$ se $x > a_i$, si ottiene, per $z = x \in \mathbb{R}$, $a_k < x < a_{k+1}$, $\arg f'(x) = \arg c_2 + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - 1)\pi$. In particolare, per $a_k \leq x \leq a_{k+1}$, dato che $f(x) - f(a_k) = \int_{a_k}^x f'(\xi) d\xi$, si ottiene $\arg(f(x) - f(a_k)) = \arg c_2 + \sum_{i=1}^k (\alpha_i - 1)\pi$ per ogni $a_k < x \leq a_{k+1}$, ovvero l'immagine dell'intervallo $[a_k, a_{k+1}]$ è il segmento di estremi $f(a_k)$ e $f(a_{k+1})$. L'angolo formato dai segmenti concorrenti in $f(a_k)$ è dato dalla differenza $\arg(f(a_{k-1}) - f(a_k)) - \arg(f(a_{k+1}) - f(a_k))$, ossia da $\pi + \arg(f(a_k) - f(a_{k-1})) - \arg(f(a_{k+1}) - f(a_k)) = \pi + (\alpha_k - 1)\pi = \alpha_k \pi$. Dato che la somma degli angoli vale $(n-2)\pi$ si deduce che l'immagine del semipiano $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ è un poligono chiuso convesso di vertici $f(a_i)$, per $i = 1, ..., n$.

Trasformazione di Joukowski (si applica in aerodinamica per studiare le linee di flusso attorno ad un profilo alare): si pone $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. La derivata $f'(z)$ si annulla in $z = \pm 1$ (zeri semplici), inoltre $f(z) = f(z^{-1})$ e vale

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos\theta + i\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin\theta,$$

ovvero l'immagine di una circonferenza di centro l'origine è un'ellisse di fuochi ± 1 (degenere nel caso $r = 1$). Si osservi che ogni circonferenza passante per ± 1 è invariante rispetto alla trasformazione $z \mapsto z^{-1}$: se $z = x + iy$ e $z^{-1} = u + iv$ si ha $u = x/(x^2 + y^2)$ e $v = -y/(x^2 + y^2)$, e da $u^2 + v^2 - av - 1 = 0$ si ricava $x^2 + y^2 - ay - 1 = 0$. In particolare, l'immagine di ogni tale circonferenza C secondo la trasformazione di Joukowski è un arco di circonferenza (percorso in entrambi i versi) di estremi ± 1. Per continuità, l'immagine di una circonferenza di raggio di poco maggiore a quello di C, che sia tangente a C in $z = 1$ e che contenga al suo interno il punto $z = -1$ avrà il profilo di una sezione alare contenente al suo interno l'arco f(C), che ne individua così la curvatura, ed avente una cuspide in $z = 1$.

Lezione del 6/12/12 (2 ore). Equazione di Laplace e di Poisson in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1, funzioni armoniche, subarmoniche, superarmoniche. Problemi al contorno: pb. di Dirichlet, pb. di Neumann. Problemi ben posti (esistenza, unicità e stabilità ripsetto ai dati della soluzione). Identità di Green e metodi di energia per l'unicità del pb. di Dirichlet e del pb. di Neumann. Il principio del massimo per funzioni subarmoniche di classe C^2 in domini limitati e conseguenze: unicità e stabilità (dipendenza continua) della soluzione del pb. di Dirichlet rispetto ai dati: per ogni $u \in C^2(\Omega)$ si ha ad esempio la stima (non ottimale!)

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + M\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} ,$$

dove $M > 0$ è una costante che dipende solo dal dominio limitato Ω. Nel caso di domini bidimensionali, il principio del massimo per funzioni armoniche è conseguenza della proprietà della media per funzioni armoniche, asua volta conseguenza della proprietà della media per funzioni olomorfe. La proprietà della media si verifica anche per funzioni armoniche in domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Lezione dell' 11/12/12 (2 ore). Metodi di risoluzione del problema di Dirichlet / Neumann: in generale, via metodi variazionali (minimizzazione di energie / distanze in opportuni spazi di Hilbert) o via principi del confronto (metodo delle sottosoluzioni di Perron). In casi particolari: via separazione di variabili (in domini rettangolari rispetto a opportuni sistemi di coordinate); via Teorema della mappa di Riemann in domini semplicemente connessi del piano, riconducendosi al problema di Dirichlet nel cerchio; via funzioni di Green del dominio dato. Interpretazione probabilistica del problema di Dirichlet e dell'equazione del calore: rappresentazione della soluzione come limite di passeggiate casuali / moti browniani.

Il problema di Dirichlet nel cerchio: risoluzione mediante separazione di variabili. La serie risultante converge nell'interno del cerchio unitario ad una soluzione dell'equazione di Laplace sotto condizioni miti sul dato al bordo g (ad esempio, basta $\|g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < +\infty$), che risulta di classe C^∞ (anzi, analitica) in virtù dell'effetto regolarizzante dell'operatore di Laplace. La soluzione all'interno del cerchio converge uniformemente al dato al bordo quando quest'ultimo è ad esempio una funzione continua con derivata a quadrato sommabile, altrimenti la convergenza è assicurata solo nei punti di continuità di g, e ad esempio nei punti di salto si ha, per il principio del massimo, che la soluzione ha punti limite compresi tra $\liminf g$ e $\limsup g$.

Lezione del 13/12/12 (2 ore). Rappresentazione integrale della soluzione u del Pb. di Dirichlet nel cerchio $\{re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r < a\}$ con dato al bordo $g(ae^{i\phi}) \equiv g(\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, via nucleo di Poisson per il cerchio: per $r < a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} g(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_a(r, \theta, \phi) g(\phi)\, d\phi .$$

Alcune proprietà del nucleo di Poisson $P_a(r, \theta, \phi)$: si tratta di una funzione simmetrica rispetto a θ e ϕ, armonica rispetto alle coordinate (r, θ) (ovvero (r, ϕ)), che tende uniformemente a zero per $r \to a$ se $|\theta - \phi| > \delta$, mentre $P_a(r, \phi, \phi) \to +\infty$ per $r \to a$. Inoltre, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_1(r, \theta, \phi)\, d\phi = 1$ per ogni $r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ovvero $P_1(r, \theta, \cdot)$ è una distribuzione di probabilità, precisamente quella relativa a dove avviene l'uscita dal cerchio di una traiettoria casuale che parte da $re^{i\theta}$.

Da queste proprietà si ricava ad esempio che se $ae^{i\phi_0}$ è un punto di continuità di g, e $re^{i\theta} \to ae^{i\phi_0}$, allora $u(re^{i\theta}) \to g(\theta_0)$, ovvero la convergenza di u al dato al bordo nei punti di continuità di quest'ultimo (vedasi Weinberger, p. 106).

Interpretazione fisica del nucleo di Poisson: fissato ϕ, $P_a(r,\theta,\phi)$ corrisponde al potenziale elettrostatico nel punto $re^{i\theta}$ originato da un dipolo posto nel punto $ae^{i\phi}$ sul bordo del cerchio.

La rappresentazione integrale della soluzione fornisce inoltre una naturale nozione di soluzione generalizzata, valida per dati al bordo non regolari.

Lezione del 18/12/12 (2 ore). Risoluzione del problema di Dirichlet mediante funzioni di Green. Dato un dominio chiuso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1 a tratti, la soluzione del problema di Dirichlet relativo ad un dato al bordo $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y) \nabla_y G(x,y) \cdot \nu \, d\sigma(y) \,,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie, ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e la funzione $G(x,y)$, definita per $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, è detta funzione di Green relativa ad Ω. Denotiamo $\Gamma(z)$, per $z \in \mathbb{R}^n$ la soluzione fondamentale del Laplaciano in $\mathbb{R}^n$ (ovvero Γ è il potenziale elettrostatico/gravitazionale generato da una carica/massa unitaria puntiforme posta nell'origine: per $n = 2$ si ha $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|$, per $n > 2$ si ha $\Gamma(z) = c_n^{-1} |z|^{2-n}$, con $\frac{c_n}{2-n} = |\partial B(0,1)|$ l'area $(n-1)$-dimensionale della superficie sferica $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$). La funzione di Green è quindi univocamente determinata dalle seguenti condizioni: $G(x,y) = \Gamma(x-y) + w(x,y)$ con $\Delta_y w(x,y) = 0$ in Ω, e $G(x,y) = 0$ per $y \in \partial\Omega$, ovvero $w(x,y) = -\Gamma(x-y)$ per $y \in \partial\Omega$ (l'unicità deriva dal fatto che la funzione $y \mapsto w(x,y)$ è soluzione di un problema di Dirichlet).

La formula di rappresentazione per la soluzione u del problema di Dirichlet si ottiene dall'identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}$$

ponendovi formalmente $v(y) = G(x,y)$, e osservando che $\Delta u = 0$ in Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$. (In realtà ponendo $v = G_\epsilon(x,y) = \Gamma_\epsilon(x-y) + w(x,y)$ e passando al limite per $\epsilon \to 0$, dove Γ_ϵ è tale che $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = 0$ per $|z| > \epsilon$ e $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = \omega_n^{-1}\epsilon^{-n}$ per $|z| \leq \epsilon$, con ω_n il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$: si verifica che vale $G_\epsilon(x,y) = G(x,y)$ per $|x-y| \geq \epsilon$ (in particolare, per $y \in \partial\Omega$), e si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x,y) &= \int_\Omega u(y)\Delta_y \Gamma_\epsilon(x-y) = \int_{B(x,\epsilon)} u(y)\omega_n^{-1}\epsilon^{-n} \\ &= u(\xi) \quad \text{per un certo } \xi \in B(x,\epsilon)\,,\end{aligned}$$

per il teorema della media integrale. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ha $u(\xi) \to u(x)$.

La determinazione della funzione di Green per domini dalla geometria semplice si può ottenere mediante il metodo delle cariche immagini: posta una carica nel punto $x \in \Omega$ se ne pongono altre in punti opportuni esterni a Ω in modo che il potenziale generato dalla distribuzione risultante abbia la frontiera $\partial\Omega$ come insieme di livello (ossia $\partial\Omega$ risulti una superficie equipotenziale): nel caso del semipiano (rispettivamente, del semispazio) viene posta una carica di segno opposto nel punto simmetrico rispetto al bordo: si ottiene cosìla rappresentazione integrale della soluzione mediante il nucleo di Poisson per il semipiano. Nel caso del cerchio (rispettivamente della palla), viene posta una carica di segno opposto (e intensità opportuna) nel punto inverso rispetto alla circonferenza (rispettivamente, alla sfera) che costituisce il bordo del dominio: si riottiene in questa maniera la rappresentazione via nucleo di Poisson per il cerchio.

Non svolto a lezione: Risoluzione del problema di Dirichlet in domini semplicemente connessi via Teorema della mappa di Riemann. Sia u la soluzione del problema di Dirichlet su D con dato al bordo g su ∂D. Fissato $z_0 \in D$ si consideri una trasformazione conforme $w = f(z, z_0) : D \to B \equiv \{|w| \leq 1\}$ tale che $f(z_0, z_0) = 0$. Detta $U(w) = U(f(z, z_0)) = u(z)$, si ha che U risolve il problema di Dirichlet in B con dato al bordo $\tilde{g}(w) = \tilde{g}(f(z, z_0)) = g(z)$.

Consideriamo la funzione olomorfa $\log(f(z, z_0)) = \log w = \log |w| + i \arg w$, e sia $z \in \partial D$. Sia (τ, n) una base ortonormale di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ con τ tangente a ∂D (e verso antiorario) e n la normale esterna a D in $z \in \partial D$. Senza perdita di generalità possiamo supporre che per quel fissato $z \in \partial D$ si abbia $(n, \tau) \equiv (e_1, e_2)$, la base canonica di $\mathbb{R}^2$. In particolare, essendo $\log w = \log(f(z, z_0))$ olomorfa, valgono le relazioni di Cauchy-Riemann

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log w = \frac{\partial}{\partial n} \log w + i \frac{\partial}{\partial \tau} \log w$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial n} \log |w| = \frac{\partial}{\partial \tau} \arg w \,.$$

Si parametrizzi ora $w \in \partial B$ ponendo $w = e^{i\psi}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ($\equiv \psi = \arg w$). In particolare, $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial n} \log |w| = \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z, z_0)|$. Per la proprietà della media, vale

$$\begin{aligned} u(z_0) = U(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(e^{i\psi}) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(z) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} g(z) \frac{\partial}{\partial n} \log |f(z, z_0)| d\tau \,. \end{aligned}$$

La funzione $G(z, z_0) = \log |f(z, z_0)|$ =Re$\,[\log(f(z, z_0))]$ si dice funzione di Green per il Laplaciano relativamente al dominio D. Nel caso D sia il semipiano $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$, si ha ad esempio $f(z, z_0) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, da cui $\log f(z, z_0) = \log(z - z_0) - \log(z - \bar{z}_0)$ e dato che su ∂D =Im$\, z = 0$ si ha $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial y} = -i \frac{\partial}{\partial x}$, si ottiene, ponendo $z = x + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\frac{\partial G}{\partial n}(x, 0, x_0, y_0) = -i \left[\frac{1}{x - z_0} - \frac{1}{x - \bar{z}_0} \right] = \frac{1}{i} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} \,.$$

si deduce la formula di rappresentazione integrale della soluzione u con dato al bordo $u(x, 0) = g(x)$ attraverso il nucleo di Poisson per il semipiano $y > 0$:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} g(x) dx \,.$$

Nel caso in cui $D = B(0,a)$, si considera $f(z,z_0) = a\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-a^2}$. Posto $z_0 = re^{i\theta}$, $z = ae^{i\phi}$, su $\partial B(0,a)$ si ha $\frac{\partial}{\partial n} = -i\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \phi}$ e $d\tau = ad\phi$ (per cui in particolare $\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}d\tau = \frac{\partial \zeta}{\partial \phi}d\phi$ per ogni funzione ζ). Essendo $\log f(z,z_0) = \log a + \log(z-z_0) - \log(z\bar{z}_0 - a^2)$, si ricava

$$
\begin{aligned}
-i\frac{\partial}{\partial \phi}\log f(z,z_0) &= -i\left[\frac{iae^{i\phi}}{ae^{i\phi}-z_0} - \frac{ie^{i\phi}\bar{z}_0}{e^{i\phi}\bar{z}_0 - a}\right] \\
&= \frac{(z_0\bar{z}_0 - a^2)e^{i\phi}}{(-a^2 - z_0\bar{z}_0)e^{i\phi} + az_0 + a\bar{z}_0e^{i2\phi}} \\
&= \frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)}\,.
\end{aligned}
$$

Si riottiene così la formula di rappresentazione integrale per la soluzione attraverso il nucleo di Poisson per il cerchio.

Lezione del 20/12/12 (2 ore). Trasformata di Fourier: per $u(t) \in L^1(\mathbb{R})$, si pone $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-2\pi i\xi t}dt$. Definizione per funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Motivazioni: analisi in frequenza di segnali non periodici (o distribuzioni statistiche o densità di probabilità), risoluzione di equazioni alle derivate parziali definite su tutto lo spazio. Confronto formale con le serie di Fourier e formula di inversione (sintesi o ricostruzione del segnale). Proprietà della trasformata di Fourier: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $||\hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^1}$ e si ha $\hat{f}(\xi) \in C^0(\mathbb{R})$. La continuità di $\hat{f}$ discende immediatamente per convergenza dominata. Inoltre $\hat{f}(\xi) \to 0$ per $|\xi| \to +\infty$ (si dice che $\hat{f} \in C^0_0(\mathbb{R})$): questo fatto si dimostra approssimando f in L^1 mediante opportune funzioni f_n le cui trasformate (che convergono uniformemente a $\hat{f}$ su $\mathbb{R}$) tendono esplicitamente a zero all'infinito.

Ad esempio: sia f_n una successione di funzioni semplici (a gradino) convergenti in media ad $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $||\hat{f}_n - \hat{f}||_{L^\infty} \leq ||f_n - f||_{L^1} \to 0$, e vale $\hat{f}_n \in C^0_0(\mathbb{R})$, come si dimostra facilmente calcolando la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo: posto $g(t) = 1$ per $|t| \leq a$ e $g(t) = 0$ per $|t| > a$, si ha $\hat{g}(\xi) = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$, ovvero $\hat{g} \in C^0_0(\mathbb{R})$.

Calcolo della trasf. di Fourier di una gaussiana. Trasf. di Fourier e traslazioni, dilatazioni (ritardo, modulazione, effetto Doppler), simmetrie (parità, disparità).

Lezione del 13/1/13 (2 ore). Relazione tra regolarità di f e decadimento all'infinito di $\hat{f}$ (e reciprocamente). Formula di Parseval $\int \hat{u}v = \int u\hat{v}$ per $u, v \in L^1$ e teorema di Plancherel (per $u \in L^1 \cap L^2$): $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$. Estensione della trasf. di Fourier ad una isometria suriettiva di $L^2(\mathbb{R})$: per $u \in L^2(\mathbb{R})$ si pone $\hat{u} := \lim \hat{u}_n$ dove il limite è inteso in $L^2(\mathbb{R})$ e $u_n \in L^1 \cap C^0_0 \cap L^2(\mathbb{R})$ è una successione tale che $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R})$ (per cui, per Plancherel, $\hat{u}_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, che è completo, e dunque è convergente). Rappresentazione della trasformata di funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ come integrale nel senso del valor principale convergente per q.o. frequenza. Prodotto di convoluzione e sua trasformata di Fourier, motivazione dalla teoria dei segnali (la convoluzione con la funzione sinc come esempio di filtro passa-basso).

Lezione del 15/1/13 (2 ore). Proprietà del prodotto di convoluzione di funzioni integrabili: commutatività, associatività. Stima di continuità in $L^1(\mathbb{R})$: $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ allora $f*g \in C^0$ e $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$. Regola di derivazione di un prodotto di convoluzione: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^k(\mathbb{R})$ si ha $f*g \in C^k(\mathbb{R})$ e $[f*g]^{(k)} = f*[g^{(k)}]$. Delta di Dirac (alias impulso ideale alias massa/carica puntiforme) come elemento neutro della convoluzione e identità approssimate. Esempi: filtri gaussiani, rettangolari, polinomiali. Regolarizzazione di funzioni integrabili mediante convoluzione con identità approssimate regolari g_λ: per $u \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $u_\lambda \equiv u*g_\lambda \to u$ in L^1 per $\lambda \to 0$, se $u \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $u_\lambda \to u$ uniformemente su $\mathbb{R}$.

Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}_x \times (0,+\infty)_t$ con dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha $u(t,x) = u_0 * G_t(x)$, con $G_t(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il nucleo del calore (è identità approssimata). Dalle proprietà del nucleo del calore si deducono le proprietà regolarizzanti dell'equazione del calore (ossia $u \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times (0,+\infty)_t)$), le proprietà di convergenza della soluzione al dato iniziale, la proprietà di propagazione dei segnali a velocità infinita. Stime di stabilità per la soluzione rispetto al dato iniziale: si ha ad esempio $\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty\|G_t\|_1 = \|u_0\|_\infty$ (principio del massimo per l'eq. del calore), oppure la stima di decadimento $\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|u_0\|_1\|G_t\|_\infty \leq C\|u_0\|_1 \cdot t^{-1}$, e stime analoghe per le derivate di u. Cenno sull'equazione del calore e nucleo del calore in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione della formula di inversione della trasfomata di Fourier per $u \in L^1 \cap C_0^0(\mathbb{R})$ con $\hat{u} \in L^1$.

Lezione del 17/1/13 (2 ore). Segnali causali. Funzione di Heaviside. Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Trasformata di Laplace. Ascissa di convergenza. La trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza (via Teorema di derivazione sotto il segno di integrale o via Teorema di Morera). Trasformata della funzone di Heaviside. Trasformata di Laplace di polinomi, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali. Formula del ritardo. Relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier. Formula di inversione di Riemann-Fourier. Formula di Heaviside per l'inversione di funzioni razionali.

Lezione del 22/1/13 (2 ore). Trasformata di Laplace e modulazione, convoluzione, integrazione, derivazione. Trasformata della Delta di Dirac. Delta di Dirca come derivata (nel senso delle distribuzioni) della funzione di Heaviside. Applicazione alla risoluzione di problemi ai valori iniziali anche in presenza di termini impulsivi: struttura della soluzione come somma del prodotto di convoluzione del termine forzante con la soluzione fondamentale (anti-trasformata della funzione di trasferimento alias reciproco del polinomio caratteristico) e dell'anti-trasformata di una funzione razionale formata con il polinomio caratteristico ed i valori iniziali.

Risoluzione di equazioni integrali di tipo Volterra nel caso in cui il nucleo sia invariante per traslazioni (ovvero rappresenti un nucleo di convoluzione).

Lezione del 24/1/13 (2 ore). Teorema del valore iniziale e finale. Trasformata di segnali periodici. Derivata nel senso delle distribuzioni e regola di trasformazione della derivata distribuzionale. Esercizi.

Bibliografia.

Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill (1987).
Matthews, Howell, *Complex analysis for mathematics and Engineering*, Jones & Bartlett (2006).
Spiegel, *Laplace Transforms*, collana Schaum, Mc Graw-Hill (1994).
Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations*, Dover (1995).
De Marco, *Analisi Matematica 2*.
Henrici, *Applied and computational Complex Analysis*, Wiley (1974).