

EX 1 fda B Analisi Matematica I

- i) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4^x + 1)^{\frac{1}{x}}$ usando le regole di de l'Hôpital dopo averne verificate le condizioni.
- ii) Enunciare il teorema di de l'Hôpital relativo al punto i)

$$\left. \begin{array}{l} f, g: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f, g \text{ derivabili in } (a, +\infty) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ g'(x) \neq 0 \text{ in } (a, +\infty) \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \text{ (reale o } \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$(4^x + 1)^{1/x}$ è definita e continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Rightarrow$ dovendo studiare il limite per $x \rightarrow +\infty$, mi restringo a $(0, +\infty)$

$$(4^x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(4^x + 1)}$$

per la continuità della funzione esponenziale risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4^x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4^x + 1)}{x}}$$

Studiamo $f(x) = \ln(4^x + 1)$ $g(x) = x$
 f, g sono continue e derivabili in $(0, +\infty)$
 $g'(x) = 1 \neq 0$ in $(0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{4^x + 1} \cdot (4^x \ln 4)}{1} = \frac{4^x \ln 4}{4^x + 1} = \frac{\cancel{4^x} \ln 4}{\cancel{4^x} (1 + \frac{1}{4^x})} = \frac{\ln 4}{1 + 4^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 4$$

sono verificate le hp del teorema di de l'Hôpital $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ln 4$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4^x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln 4} = 4$