TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE prof. M. Spera

Lezione **XLIV**

☆ Derivata covariante di tensori

☆ Differenziale covariante di un tensore $T \in \mathcal{T}^{(0,r)}$ (r-covariante) $\qquad \nabla T \in \mathcal{T}^{(0,r+1)}$

$$(\nabla T)(Y_1 \dots Y_r, Z) := Z\left[T(Y_1 \dots Y_r)\right]$$

$$- T(\nabla_Z Y_1, \dots Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_r)$$

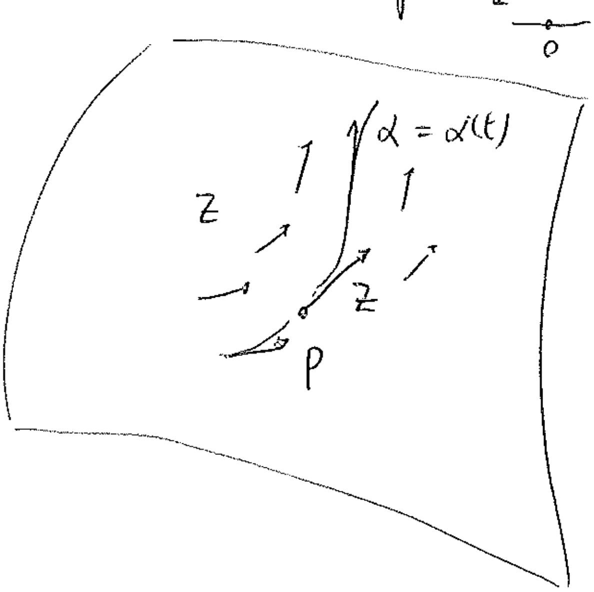
[cf. la def. di derivata di Lie]

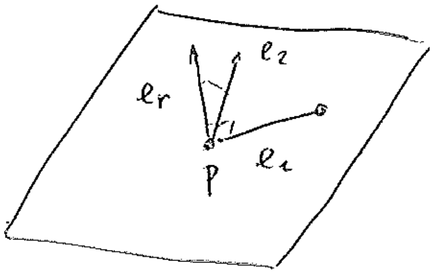
☆ Derivata covariante $\quad \nabla_Z T \in \mathcal{T}^{(0,r)}$

$$(\nabla_Z T)(Y_1 \dots Y_r) := \nabla T(Y_1 \dots Y_r, Z)$$

interpretazione geometrica. $\qquad I \ni t \longmapsto \alpha(t) \qquad \alpha(0) = P$

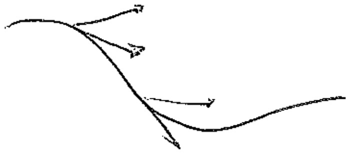
$$\alpha'(t) = Z(\alpha(t))$$





$(e_1 \dots e_n)$ base ortonormale

trasportiamola parallelamente lungo α $\qquad \nabla_Z e_i \equiv 0$



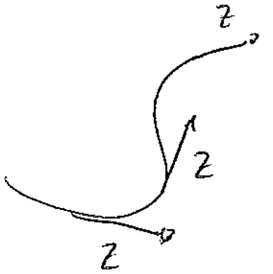
Si ha allora

$$\nabla_Z T\,(e_{i_1}(t)\dots e_{i_r}(t)) = \frac{dT_{i_1\dots i_r}}{dt} - T(\nabla_Z e_{i_1}, e_{i_2}\dots) - \dots - T(e_{i_1},\dots,\nabla_Z e_{i_r})$$

componenti di T

$$= \frac{dT_{i_1\dots i_r}}{dt}$$ i.e. le componenti di $\nabla_Z T$,

in un riferimento parallelo lungo una curva, sono date dalle derivate ordinarie delle componenti



☆☆ Se $\nabla T = 0$, T è detto parallelo

Esempi ① $\nabla g = 0$; infatti

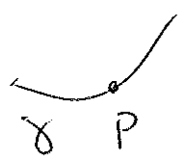
$$\nabla g\,(X,Y,Z) = Z\,g(X,Y) - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$= 0$ per def. di connessione riemanniana

② v_g = volume riemanniano, è parallelo:
(tensore $(0,n)$ antisimmetrico)

in un pto, sia $v_g|_p = (e_1^*)_p \wedge (e_2^*)_p \wedge \dots (e_n^*)_p$

$(e_1 \dots e_n)$ base ortonormale in p. Presa una curva liscia γ qualsiasi uscente da p e considerato il repère mobile parallelo lungo γ, da $\nabla e_i = 0$



si trova immediatamente $\boxed{\nabla v_g = 0}$
$((v_g)_{12\dots n} \equiv 1)$

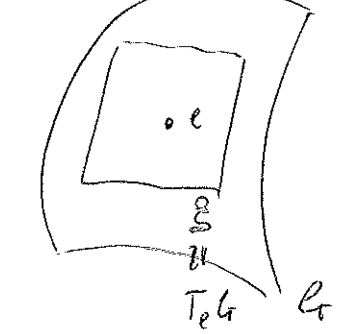
se $Y \leftrightarrow X \longmapsto \langle X, Y\rangle$

③ $(\nabla_Z X)(Y) = \nabla X(Y,Z) = Z(\underset{X(Y)}{\langle X, Y\rangle}) - X(\nabla_Z Y) = (\nabla_Z X)(Y)$

come tensore — come campo

④ Se R è parallelo, si parla di spazi (localmente) simmetrici (E. Cartan)

$\boxed{\text{Esempio importante}}$



☆ G gruppo di Lie compatto, munito di metrica bi-invariante

(prodotto scalare Ad-invariante su $\mathfrak{g}$

$$(☆) \quad \langle gYg^{-1}, gZg^{-1} \rangle = \langle Y, Z \rangle \qquad g \in G$$

(li matriciale) $\rightsquigarrow$ $\langle \ \rangle$ è ad-invariante

ovvero $\langle [X,Y], Z \rangle + \langle Y, [X,Z] \rangle = 0$

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

(si ponga $g(t) = e^{tX}$ in (☆) e la si derivi in $t = 0$...

ogni metrica siffatta è proporzionale alla metrica di Killing-Cartan ☆

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{Tr}\left((\mathrm{ad}_X)\, \mathrm{ad}_Y\right)$$

$$(\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad \mathrm{ad}_X Z := [X, Z])$$

$\ulcorner$ Se $G = SO(3)$ $\quad \mathfrak{g} = so(3) = \{ A \in M_3 \,/\, A^T = -A \}$

(matrici antisimmetriche) $\qquad \dim G = \dim \mathfrak{g} = 3$,

si ha semplicemente $\langle X, Y \rangle = -\mathrm{Tr}(XY)$

controlliamo direttamente la bi-invarianza:

$\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y \rangle =$

$$-\mathrm{Tr}\left(gXg^{-1}gYg^{-1}\right) = -\mathrm{Tr}\left(gXYg^{-1}\right) = -\mathrm{Tr}(XY)$$

(Tr. è inv. per similitudine) $\qquad = \langle X, Y \rangle$ $\lrcorner$

★ La connessione di Levi-Civita è la connessione di Cartan

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$$

ma se X e $Y \in \mathfrak{g}$ (i.e. sono campi invarianti a sinistra; tuttavia, dato che tali campi in ogni punto generano T_pG, si arriva ad una formula generale imponendo gli assiomi di connessione)

① metricità:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = \frac{1}{2}\langle [X,Y], Z\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\langle Y, [X,Z]\rangle = 0 \qquad \text{(ad-invarianza)}$$

e

$$X\langle Y,Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Ad(e^{tX})Y, Ad(e^{tX})Z\rangle\Big|_{t=0}$$

$$= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle$$

o calcolo diretto nell'esempio

$=0$ (ad-invarianza). ✓

② assenza di torsione

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \frac{1}{2}[X,Y] - \frac{1}{2}[Y,X]$$

$$= \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{2}[X,Y]$$

$$= [X,Y] \quad ✓$$

---

inciso: la posizione $\tilde{\nabla}_X Y = [X,Y]$ $(= \mathcal{L}_X Y)$ definisce una connessione? **NO**: dovrebbe risultare infatti

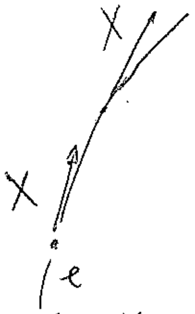
$$\tilde{\nabla}_{\alpha X} Y = \underset{C^\infty}{\alpha}\, \tilde{\nabla}_X Y = \alpha[X,Y] \; ; \text{ ma } [\alpha X, Y] =$$

$$= \alpha \underbrace{X(1)}_{=0} Y - \underbrace{Y(\alpha) X}_{\neq 0} + \alpha[X,Y] = -\langle d\alpha, Y\rangle + \alpha[X,Y].$$

✱ geodetiche (è sufficiente determinare quelle uscenti dall'elemento neutro) $\equiv$ sottogruppi ad un parametro:

basta verificare che un s. gruppo ad un parametro è una geodetica; il viceversa segue per l'es. e unicità della geodetica uscente da un dato pto con una data velocità

$$\nabla_X X = \frac{1}{2}[X,X] = 0$$



* * * * A titolo di esercizio, ricostruiamo la connessione di Cartan:

Notiamo che, imponendo che i s. gruppi ad un parametro siano geodetiche $\nabla_Z Z = 0$, si ha, da

$$0 = \nabla_{X+Y}(X+Y) = \underbrace{\nabla_X X}_{=0} + \underbrace{\nabla_Y Y}_{=0} + \nabla_X Y + \nabla_Y X$$

e dall'assenza di torsione

$$\begin{cases} \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \\ \nabla_X Y + \nabla_Y X = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$, ovvero, si ottiene la connessione di Cartan

Curvatura della connessione di Cartan

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\quad R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z] = \frac{1}{4}\,ad_{[X,Y]}Z \;\; \overset{\shortparallel}{[ad_X, ad_Y]Z} \\ &2)\quad \langle R(X,Y)Z, W\rangle = \frac{1}{4}\langle [X,Y],[Z,W]\rangle \end{aligned}}$$

Infatti: $\quad (R(X,Y) = \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y])$

$$-\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$= \underbrace{\left\{ \nabla_{[X,Y]} - (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X) \right\} Z}_{R(X,Y)Z}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\overset{\shortparallel}{\frac{1}{4}(*) + \frac{1}{4}(*)}}{\frac{1}{2}[[X,Y],Z]} - \left\{ \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] - \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] \right\} \quad - \frac{1}{4}[X,[Y,Z]] + \frac{1}{4}[Y,[X,Z]] \quad \triangle!$$

$$= \frac{1}{4}[[X,Y],Z] + \underbrace{\frac{1}{4}\left\{ [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + \frac{1}{4}[[Z,X],Y] \right\}}_{=0 \text{ per Jacobi}}$$

2) Segue facilmente da 1)

Corollario $\quad \langle R(X,Y)X, Y\rangle = \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2 \geq 0$

(curvatura sezionale non negativa)

★ Nelle applicazioni sono rilevanti le metriche su G (Lie) invarianti (a destra o a sinistra)

L'espressione per la connessione di Levi-Civita è più complicata, e così il resto.

Ci limitiamo a citare i due esempi seguenti

$G = SO(3)$, con metrica inv. a sinistra (e destra)

$\mathfrak{g} = so(3)$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{geodetiche: equazioni di Eulero per il corpo rigido}}$ ★

problemi analitici rilevanti

$G = SDiff(\mathbb{R}^3) = \{$ diff. di $\mathbb{R}^3$ conservanti il volume, "vicini" all'identità all'∞ $\}$

★ fluido incomprimibile, non viscoso [i.e. perfetto]

$\mathfrak{g} = \{ X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \,/\, \operatorname{div} X = 0 ,\ X$ "svanisce rapidamente" all'∞ $\}$

"algebra di Lie" di G

$\exists$ una metrica naturale inv. a destra

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{geodetiche = soluzioni dell'equazione di Eulero per i fluidi perfetti}}$

★ Gli spazi (loc.) simmetrici, ovvero quelli per i quali $\nabla R = 0$ giocano pure un ruolo importante, anche nelle applicazioni.

Ma questa è un'altra storia ...