PROBABILITA' E STATISTICA
Prova del 29/07/2016
Traccia A

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di valori presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda.

X
9
0
7
1
7
3
2
29

$$M(X) = \frac{29}{7} = \mathbf{4{,}1429}$$

Ma(X) = **impossibile,** perché una delle X è uguale a 0

Mg(X) = **nulla,** perché una delle X è uguale a 0

mediana = **3** (elemento nella posizione centrale della distribuzione ordinata dei valori)

moda = **7** (elemento con la frequenza più elevata)

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
5	29	145	25	841
9	25	225	81	625
12	20	240	144	400
13	18	234	169	324
39	**92**	**844**	**419**	**2190**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{39}{4} = \mathbf{9{,}75}$$

$$M(Y) = \frac{92}{4} = \mathbf{23}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{844}{4} - 9{,}75 * 23 = \mathbf{-13{,}2500}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{419}{4} - 9{,}75\hat{}2 = \mathbf{9{,}6875}$$

$$\mathbf{b} = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{-13{,}25}{9{,}6875} = \mathbf{-1{,}3677}$$

$$\mathbf{a} = M(Y) - bM(X) = 23 - (-1{,}3677) * 9{,}75 = \mathbf{36{,}3355}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{2190}{4} - 23\text{^}2 = \mathbf{18{,}5000}$$

$\sigma(Y) =$ RADQ(18,5) = **4,3012**

$\sigma(X) =$ RADQ(9,6875) = **3,1125**

$$\mathbf{r} = \frac{-13{,}25}{4{,}3012 * 3{,}1125} = \mathbf{-0{,}9897}$$

Si registra una forte relazione lineare indiretta

ESERCIZIO 3

Data una V.C. Normale con media 100 e deviazione standard pari a 20, calcolare:

a) P(X) > 120
b) P(X) < 70
c) 80 < P(X) < 110
d) P(X) > 90

Effettuando la standardizzazione ed utilizzando le relative tavole:
a) P(X) > 120
P(X> 120) = P(u > (120-100)/20) = P(u > 1) = 0,5 - 0,3413 = **0,1587**

b) P(X) < 70
P(X<70) = P(u < (70-100)/20) = P(u<-1,5)= 0,5 - 0,4332 = **0,0668**

c) 80 < P(X) < 110
P(80<X<110)= P((80-100)/20 < u < (110-100)/20) = P (-1 < u < 0,5) = 0,3413 + 0,1915 = **0,5328**

d) P(X) > 90
P(X > 90) = P(u > (90-100)/20) = P(u > -0,5) = 0,1915 + 0,5 = **0,6915**

ESERCIZIO 4

Utilizzando la stessa variabile casuale proposta nell'esercizio 3, calcolare le medesime probabilità tramite R-Studio e disegnarne il grafico (si consiglia asse delle X da 0 a 200).

```
# CREO L'ASSE DELLE X
x=seq(0, 200, by = 0.01)

# CREO LA DISTRIBUZIONE NORMALE
normale=dnorm(x, 100, 20)

# CREO IL GRAFICO
plot(x, normale, type = "l", xlab="x", ylab = "densità di probabilità")

# A - CALCOLO P(X) > 120
pnorm(120, 100, 20, lower.tail=FALSE)

# B - CALCOLO P(X) < 70
pnorm(70, 100, 20)

# C - CALCOLO 80 < P(X) < 110
pnorm(110, 100, 20)-pnorm(80, 100, 20)

# D - CALCOLO P(X) > 90
pnorm(90, 100, 20, lower.tail=FALSE)
```

ESERCIZIO 5

Si ipotizzi di aver rilevato il n. di ore di straordinario mensili svolte da un gruppo di lavoratori italiani e da un corrispondente gruppo di colleghi indiani e che la varianza delle due popolazioni sia uguale. Il livello di confidenza sia pari al 95%. Verificare l'ipotesi che le medie siano uguali.

```
# GENERO IL VETTORE DEI DATI
straord.ita = c(10, 23, 12, 23, 11)
straord.ind = c(32, 20, 7, 19, 3)

# EFFETTUO IL TEST PER IL CONFRONTO FRA LE MEDIE DELLE DUE POPOLAZIONI
t.test(straord.ita, straord.ind, var.equal=TRUE, conf.level=0.95)

# POICHE' L'ALPHA TEORICO (OSSIA IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA') E' 0.05 ED E' INFERIORE
AL p-value CALCOLATO DI 0.948, SI ACCETTA L'IPOTESI NULLA DI UGUAGLIANZA FRA LE
MEDIE
```

PROBABILITA' E STATISTICA

Prova del 29/07/2016

Traccia B

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di valori presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda.

X
5
2
0
10
9
4
2
32

$$M(X) = \frac{32}{7} = \mathbf{4{,}5714}$$

Ma(X) = **impossibile,** perché una delle X è uguale a 0

Mg(X) = **nulla,** perché una delle X è uguale a 0

mediana = **4** (elemento nella posizione centrale della distribuzione ordinata dei valori)

moda = **2** (elemento con la frequenza più elevata)

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
2	5	10	4	25
6	16	96	36	256
8	20	160	64	400
11	25	275	121	625
27	**66**	**541**	**225**	**1306**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{27}{4} = \mathbf{6{,}75}$$

$$M(Y) = \frac{66}{4} = \mathbf{16{,}5}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{541}{4} - 6{,}75 * 16{,}5 = \mathbf{23{,}8750}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{225}{4} - 6{,}75\text{^}2 = \mathbf{10{,}6875}$$

$$\mathbf{b} = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{23{,}875}{10{,}6875} = \mathbf{2{,}2339}$$

$$\mathbf{a} = M(Y) - bM(X) = 16{,}5 - (2{,}2339) * 6{,}75 = \mathbf{1{,}4211}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{1306}{4} - 16,5\text{^}2 = \mathbf{54,2500}$$

$\sigma(Y) =$ RADQ(54,25) = **7,3655**

$\sigma(X) =$ RADQ(10,6875) = **3,2692**

$$\mathbf{r} = \frac{23,875}{7,3655 * 3,2692} = \mathbf{0,9915}$$

Si registra una forte relazione lineare diretta

ESERCIZIO 3

Data una V.C. Normale con media 90 e deviazione standard pari a 15, calcolare:

a) P(X) > 120
b) P(X) < 75
c) 75 < P(X) < 105
d) P(X) > 150

Effettuando la standardizzazione ed utilizzando le relative tavole:
a) P(X) > 120
P(X> 120) = P(u > (120-90)/15) = P(u > 2) = 0,5 - 0,4772 = **0,0228**

b) P(X) < 75
P(X<75) = P(u < (75-90)/15) = P(u<-1)= 0,5 - 0,3413 = **0,1587**

c) 75 < P(X) < 105
P(75<X<105)= P((75-90)/15 < u < (105-90)/15) = P (-1 < u < 1) = 0,3413 + 0,3413 = **0,6826**

d) P(X) > 150
P(X > 150) = P(u > (150-90)/15) = P(u > 4) = **0** (si trova oltre il limite delle tavole)

ESERCIZIO 4

Utilizzando la stessa variabile casuale proposta nell'esercizio 3, calcolare le medesime probabilità tramite R-Studio e disegnarne il grafico (si consiglia asse delle X da 0 a 180).

```
# CREO L'ASSE DELLE X
x=seq(0, 180, by = 0.01)

# CREO LA DISTRIBUZIONE NORMALE
normale=dnorm(x, 90, 15)

# CREO IL GRAFICO
plot(x, normale, type = "l", xlab="x", ylab = "densità di probabilità")

# A - CALCOLO P(X) > 120
pnorm(120, 90, 15, lower.tail=FALSE)

# B - CALCOLO P(X) < 75
pnorm(75, 90, 15)

# C - CALCOLO 75 < P(X) < 105
pnorm(105, 90, 15)-pnorm(75, 90, 15)

# D - CALCOLO P(X) > 150
pnorm(150, 90, 15, lower.tail=FALSE)
```

ESERCIZIO 5

Si ipotizzi di aver rilevato il n. di ore di straordinario mensili svolte da un gruppo di lavoratori italiani e da un corrispondente gruppo di colleghi pakistani e che la varianza delle due popolazioni sia uguale. Il livello di confidenza sia pari al 95%. Verificare l'ipotesi che le medie siano uguali.

```
# GENERO IL VETTORE DEI DATI
straord.ita = c(20, 42, 24, 45, 24)
straord.pak = c(14, 26, 55, 50, 20)

# EFFETTUO IL TEST PER IL CONFRONTO FRA LE MEDIE DELLE DUE POPOLAZIONI
t.test(straord.ita, straord.pak, var.equal=TRUE, conf.level=0.95)

# POICHE' L'ALPHA TEORICO (OSSIA IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA') E' 0.05 ED E' INFERIORE
AL p-value CALCOLATO DI 0.8421, SI ACCETTA L'IPOTESI NULLA DI UGUAGLIANZA FRA LE
MEDIE
```

PROBABILITA' E STATISTICA
Prova del 29/07/2016
Traccia C

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di valori presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda.

X
6
2
10
9
6
0
1
34

$$M(X) = \frac{34}{7} = \mathbf{4{,}8571}$$

Ma(X) = **impossibile,** perché una delle X è uguale a 0

Mg(X) = **nulla,** perché una delle X è uguale a 0

mediana = **6** (elemento nella posizione centrale della distribuzione <u>ordinata</u> dei valori)

moda = **6** (elemento con la frequenza più elevata)

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
8	15	120	64	225
9	13	117	81	169
11	11	121	121	121
13	9	117	169	81
41	**48**	**475**	**435**	**596**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{41}{4} = \mathbf{10{,}25}$$

$$M(Y) = \frac{48}{4} = \mathbf{12}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{475}{4} - 10{,}25 * 12 = \mathbf{-4{,}2500}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{435}{4} - 10{,}25\text{^}2 = \mathbf{3{,}6875}$$

$$\mathbf{b =} \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{-4{,}25}{3{,}6875} = \mathbf{-1{,}1525}$$

$$\mathbf{a =} M(Y) - bM(X) = 12 - (-1{,}1525) * 10{,}25 = \mathbf{23{,}8136}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{596}{4} - 12\text{^}2 = \mathbf{5{,}0000}$$

$\sigma(Y) =$ RADQ(5) = **2,2361**

$\sigma(X) =$ RADQ(3,6875) = **1,9203**

$$\mathbf{r} = \frac{-4{,}25}{2{,}2361 * 1{,}9203} = \mathbf{-0{,}9898}$$

Si registra una forte relazione lineare indiretta

ESERCIZIO 3

Data una V.C. Normale con media 120 e deviazione standard pari a 20, calcolare:

a) P(X) > 120
b) P(X) < 80
c) 80 < P(X) < 140
d) P(X) > 200

Effettuando la standardizzazione ed utilizzando le relative tavole:
a) P(X) > 120
P(X> 120) = P(u > (120-120)/20) = P(u > 0) = **0,5**

b) P(X) < 80
P(X<80) = P(u < (80-120)/20) = P(u < -2)= 0,5 - 0,4772 = **0,0228**

c) 80 < P(X) < 140
P(80<X<110)= P((80-120)/20 < u < (140-120)/20) = P (-2 < u < 1) = 0,4772 + 0,3413 = **0,8185**

d) P(X) > 200
P(X > 200) = P(u > (200-120)/20) = P(u > 4) = **0** (si trova oltre il limite delle tavole)

ESERCIZIO 4

Utilizzando la stessa variabile casuale proposta nell'esercizio 3, calcolare le medesime probabilità tramite R-Studio e disegnarne il grafico (si consiglia asse delle X da 0 a 200).

```
# CREO L'ASSE DELLE X
x=seq(0, 240, by = 0.01)

# CREO LA DISTRIBUZIONE NORMALE
normale=dnorm(x, 120, 20)

# CREO IL GRAFICO
plot(x, normale, type = "l", xlab="x", ylab = "densità di probabilità")

# A - CALCOLO P(X) > 120
pnorm(120, 120, 20, lower.tail=FALSE)

# B - CALCOLO P(X) < 80
pnorm(80, 120, 20)

# C - CALCOLO 80 < P(X) < 140
pnorm(140, 120, 20)-pnorm(80, 120, 20)

# D - CALCOLO P(X) > 200
pnorm(200, 120, 20, lower.tail=FALSE)
```

ESERCIZIO 5

Si ipotizzi di aver rilevato il n. di ore di straordinario mensili svolte da un gruppo di lavoratori italiani e da un corrispondente gruppo di colleghi taiwanesi e che la varianza delle due popolazioni sia uguale. Il livello di confidenza sia pari al 95%. Verificare l'ipotesi che le medie siano uguali.

```
# GENERO IL VETTORE DEI DATI
straord.ita = c(13, 28, 16, 30, 16)
straord.tai = c(9, 17, 37, 33, 13)

# EFFETTUO IL TEST PER IL CONFRONTO FRA LE MEDIE DELLE DUE POPOLAZIONI
t.test(straord.ita, straord.tai, var.equal=TRUE, conf.level=0.95)

# POICHE' L'ALPHA TEORICO (OSSIA IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA') E' 0.05 ED E' INFERIORE
AL p-value CALCOLATO DI 0.8597, SI ACCETTA L'IPOTESI NULLA DI UGUAGLIANZA FRA LE
MEDIE
```

PROBABILITA' E STATISTICA

Prova del 29/07/2016

Traccia D

ESERCIZIO 1

Sulla distribuzione di valori presentata in tabella, calcolare:
a) la media aritmetica, la media armonica e la media geometrica;
b) la mediana e la moda.

X
9
1
2
5
0
1
7
25

$$M(X) = \frac{25}{7} = \mathbf{3{,}5714}$$

Ma(X) = **impossibile,** perché una delle X è uguale a 0

Mg(X) = **nulla,** perché una delle X è uguale a 0

mediana = **2** (elemento nella posizione centrale della distribuzione ordinata dei valori)

moda = **1** (elemento con la frequenza più elevata)

ESERCIZIO 2

X	Y	X * Y	X^2	Y^2
5	9	45	25	81
9	18	162	81	324
11	25	275	121	625
13	30	390	169	900
38	**82**	**872**	**396**	**1930**

Sui dati presentati in tabella calcolare:
a) i parametri della retta interpolante Y'=a+bX;
b) il coefficiente di correlazione lineare, commentandolo brevemente;

a) Calcolo dei parametri della retta interpolante Y'=a+bX :

Calcolo attraverso le formule dirette (ma si poteva anche sviluppare il sistema):

$$b = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \qquad a = M(Y) - bM(X)$$

$$M(X) = \frac{38}{4} = \mathbf{9,5}$$

$$M(Y) = \frac{82}{4} = \mathbf{20,5}$$

$$Cov(X;Y) = M(X*Y) - M(X)*M(Y) = \frac{872}{4} - 9,5 * 20,5 = \mathbf{23,2500}$$

$$V(X) = M(X^2) - M(X)^2 = \frac{396}{4} - 9,5\text{^}2 = \mathbf{8,7500}$$

$$\mathbf{b} = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{23,25}{8,75} = \mathbf{2,6571}$$

$$\mathbf{a} = M(Y) - bM(X) = 20,5 - (2,6571) * 9,5 = \mathbf{-4,7429}$$

b) Calcolo del coefficiente di correlazione lineare e suo breve commento:

$$r = \frac{Cov(X;Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$V(Y) = \frac{1930}{4} - 20{,}5\text{^}2 = \mathbf{62{,}2500}$$

$\sigma(Y) =$ RADQ(62,25) = **7,8899**

$\sigma(X) =$ RADQ(8,75) = **2,9580**

$$\mathbf{r} = \frac{23{,}25}{7{,}8899 * 2{,}958} = \mathbf{0{,}9962}$$

Si registra una forte relazione lineare diretta

ESERCIZIO 3

Data una V.C. Normale con media 110 e deviazione standard pari a 20, calcolare:

a) P(X) > 130
b) P(X) < 90
c) 70 < P(X) < 110
d) P(X) > 30

Effettuando la standardizzazione ed utilizzando le relative tavole:
a) P(X) > 130
P(X> 130) = P(u > (130-110)/20) = P(u > 1) = 0,5 - 0,3413 = **0,1587**

b) P(X) < 90
P(X<90) = P(u < (90-110)/20) = P(u<-1)= 0,5 - 0,3413 = **0,1587**

c) 70 < P(X) < 110
P(70<X<110)= P((70-110)/20 < u < (110-110)/20) = P (-2 < u < 0) = **0,4772**

d) P(X) > 30
P(X > 30) = P(u > (30-110)/20) = P(u > -4) = **1** (si trova oltre il limite inferiore delle tavole)

ESERCIZIO 4

Utilizzando la stessa variabile casuale proposta nell'esercizio 3, calcolare le medesime probabilità tramite R-Studio e disegnarne il grafico (si consiglia asse delle X da 0 a 220).

```
# CREO L'ASSE DELLE X
x=seq(0, 220, by = 0.01)

# CREO LA DISTRIBUZIONE NORMALE
normale=dnorm(x, 110, 20)

# CREO IL GRAFICO
plot(x, normale, type = "l", xlab="x", ylab = "densità di probabilità")

# A - CALCOLO P(X) > 130
pnorm(130, 110, 20, lower.tail=FALSE)

# B - CALCOLO P(X) < 90
pnorm(90, 110, 20)

# C - CALCOLO 70 < P(X) < 110
pnorm(110, 110, 20)-pnorm(70, 110, 20)

# D - CALCOLO P(X) > 30
pnorm(30, 110, 20, lower.tail=FALSE)
```

ESERCIZIO 5

Si ipotizzi di aver rilevato il n. di ore di straordinario mensili svolte da un gruppo di lavoratori italiani e da un corrispondente gruppo di colleghi malesiani e che la varianza delle due popolazioni sia uguale. Il livello di confidenza sia pari al 95%. Verificare l'ipotesi che le medie siano uguali.

```
# GENERO IL VETTORE DEI DATI
straord.ita = c(50, 105, 60, 113, 60)
straord.mal = c(35, 65, 138, 125, 50)

# EFFETTUO IL TEST PER IL CONFRONTO FRA LE MEDIE DELLE DUE POPOLAZIONI
t.test(straord.ita, straord.mal, var.equal=TRUE, conf.level=0.95)

# POICHE' L'ALPHA TEORICO (OSSIA IL LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA') E' 0.05 ED E' INFERIORE
AL p-value CALCOLATO DI 0.8426, SI ACCETTA L'IPOTESI NULLA DI UGUAGLIANZA FRA LE
MEDIE
```