TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Lezione XXIV

vogliamo definire, su

$$\Lambda^{\cdot}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(M)$$

forme differenziali

(M varietà, dim M = n)

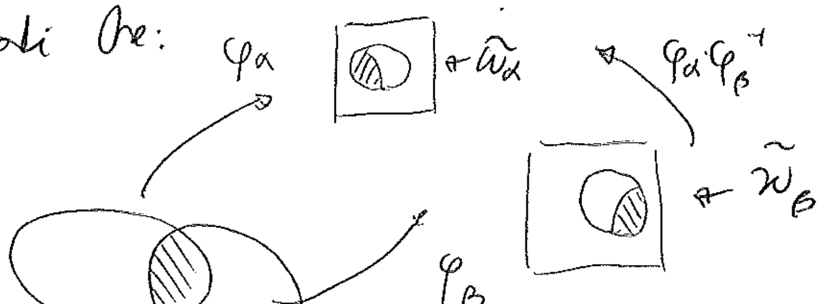
i seguenti operatori: d, i_X, $\mathcal{L}_X$

d: diff. esterno; i_X: contrazione con $X \in \mathfrak{X}(M)$; $\mathcal{L}_X$: derivata di Lie

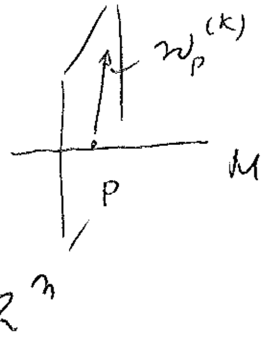
e arrivare a dimostrare la "formula magica" di E. Cartan:

$$\mathcal{L}_X = d\, i_X + i_X\, d$$

osservato che $\omega \in \Lambda^k(M)$ è data localmente, da forme $\tilde{\omega}_\alpha$ su $\mathbb{R}^n$ tali che:



$$\tilde{\omega}_\beta = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^* \tilde{\omega}_\alpha$$



Da quanto già sappiamo sulle forme in $\mathbb{R}^n$

si conclude facilmente che

$d\omega$ può essere definito localmente, e la definizione è ben posta (producciamo effettivamente una $n+1$ forma)

$$d\tilde{w}_\beta = d(\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1})^* \tilde{w}_\alpha = (\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1})^* d\tilde{w}_\alpha$$

e valgono tutte le proprietà dianzi dimostrate

$$(d^2 = 0 \quad , \quad d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\tau \ldots)$$

osserviamo che, utilizzando una partizione dell'unità, una forma definita su $U \subset M$ (U aperto) può essere estesa ad una forma su M

4 . Espressione intrinseca di $d\omega$, $\omega \in \Lambda^1(M)$

$$\boxed{d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y])}$$

Dim. Lavoriamo localmente, sicché sarà sufficiente prendere $\omega = u\,dv$ $\quad u, v \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$d\omega = du \wedge dv$$

1° membro

$$d\omega(X,Y) = (du \wedge dv)(X,Y) = du(X)\,dv(Y) - dv(X)\,du(Y)$$

$$= X(u)Y(v) - X(v)Y(u) \equiv \mathrm{I}$$

2° membro: $X\omega(Y) =$

$$X[u\,dv(Y)] = X[u\,Y(v)] = X(u)Y(v) + u\,X(Y(v))$$

$$-Y\omega(X) = -Y(u\,dv(X)) = -Y(u)X(v) - u\,Y(X(v))$$

$$-\omega([X,Y]) = -u\,dv([X,Y]) = -u\,[X,Y](v)$$

$\mathrm{II} =$

$$X(u)Y(v) - Y(u)X(v) + \cancel{u \cdot [X,Y](v)} - \cancel{u \cdot [X,Y](v)}$$

$$= \mathrm{I}$$

In generale, si prova che

$$d\omega(X_1 \dots X_{K+1}) = \sum_{i=1}^{K+1} (-1)^{i+1} X_i\left[\omega(X_1 \dots \hat{X}_K, \dots X_{K+1})\right]$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1 \dots \hat{X}_i \dots \hat{X}_j \dots X_{K+1})$$

Moltiplicazione interna (interior multiplication) o contrazione (contraction)

$i_X \quad \Lambda^k \to \Lambda^{k-1} \qquad i : \Lambda \to \Lambda$

$\omega \longmapsto i_X \omega$

(k-1)-forme

$$(i_X \omega)(X_1 \dots X_{k-1}) := \omega(X, X_1 \dots X_{k-1})$$

vettore

k-forma

(altra not: $X \lrcorner \omega$)

Proprietà: • i_X è lineare (ok)

• $i_{\alpha X + \beta Y}\, \omega = \alpha\, i_X \omega + \beta\, i_Y \omega$

[vale anche per campi vettoriali, α, β funzioni]

$\boxed{i^2 = 0 \text{ e } i \text{ è un'antiderivazione (come } d \text{ !!)}}$

$$(*) \quad \boxed{i_X(\overset{k}{\omega} \wedge \eta) = i_X \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X \eta}$$

per k-vettori e k-forme diff.

$$i_X(i_X \omega)(X_1 \dots X_{k-2}) = (i_X \omega)(X, X_1 \dots X_{k-2})$$

$$= \omega(X, X, X_1 \dots X_{k-2}) = 0$$

antisimmetria

Sia $\omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \omega^k$ (prodotto di 1-forme)

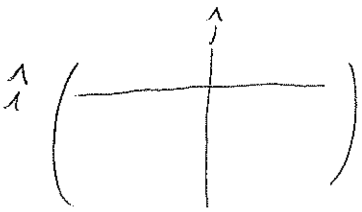
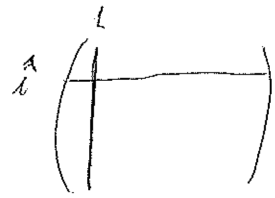
$$X_1 = X$$

$$(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \omega^k)(X_1, \dots X_k)$$

basta provare

$$\overset{?}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(X_1)\,(\omega^1 \wedge \dots \widehat{\omega^i} \wedge \omega^k)(X_2 \dots X_k)$$

Sia $\mathbb{X} = (\omega^i(X_j))$

$\mathbb{X}^i_j =$  

$$\mathrm{I} = \det \mathbb{X} \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega^i(X_1) \det \mathbb{X}^i_1 = \mathrm{II}$$

Sì: è la formula di Laplace!

Da questo caso particolare si giunge a quello generale (*)

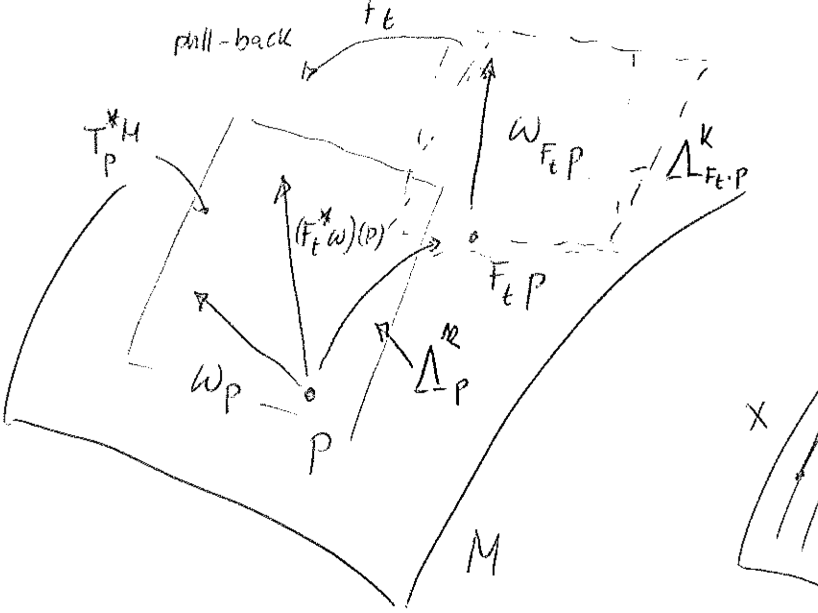
☆ <u>Derivata di Lie di una k-forma</u>

è ancora una k-forma liscia

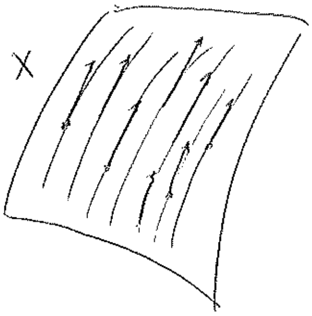
$$\mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt}(F_t^* \omega)\Big|_{t=0}$$

Ancora una "derivata del pescatore"

$$(\mathcal{L}_X \omega)(p) = \frac{d}{dt}(F_t^* \omega)\Big|_{t=0}(p) \neq \lim_{t\to 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t \cdot p}) - \omega_p}{t}$$



$$\boxed{\begin{array}{c} F^X = F_t^X \equiv F_t \\ \text{flusso di } X \end{array}}$$



in generale
$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \tau)$
$= \mathcal{L}_X \omega \wedge \tau$
$+ \omega \wedge \mathcal{L}_X \tau$

e ancora più in generale

$\mathcal{L}_X(T \otimes S)$ T, S tensori
$\|$
$\mathcal{L}_X T \otimes S$ (☆)
$+ T \otimes \mathcal{L}_X S$

di fatto, è una super generalizzazione della regola di Leibniz

vedi ⟶

La "formula magica di Cartan"

Cartan's magic formula

$$\mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X(d\omega)$$

☆☆☆
$$\boxed{\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d}$$

$$\mathcal{L} = d \cdot i + i \cdot d$$

Notare $\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X)$ (e vale ☆☆☆

Dimostrazione di (*)

<u>Idea di base:</u> (σ, τ tensori covarianti, per fissare le idee)

come la regola di Leibniz usuale ...

$$(\mathcal{L}_X(\sigma\otimes\tau))\Big|_p = \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^*[(\sigma\otimes\tau)_{\theta_t(p)}] - (\sigma\otimes\tau)_p}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^*\sigma_{\theta_t(p)} \otimes \theta_t^*\tau_{\theta_t(p)} - \sigma_p\otimes\tau_p}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^*\sigma_{\theta_t(p)} \otimes \theta_t^*\tau_{\theta_t(p)} - \sigma_p \otimes \theta_t^*\tau_{\theta_t(p)}}{t} + \frac{\sigma_p \otimes \theta_t^*\tau_{\theta_t(p)} - \sigma_p\otimes\tau_p}{t}$$

$$= \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{(\theta_t^*\sigma_{\theta_t(p)} - \sigma_p)}{t}}_{(\mathcal{L}_X\sigma)_p} \otimes \underbrace{\theta_t^*\tau_{\theta_t(p)}}_{\tau_p} + \underbrace{\sigma_p \lim_{t\to 0}\frac{\theta_t^*\tau_{\theta_t(p)} - \tau_p}{t}}_{\sigma_p\ (\mathcal{L}_X\tau)_p}$$

$$\mathcal{L}_X(\sigma\otimes\tau) = \mathcal{L}_X\sigma\otimes\tau + \sigma\otimes\mathcal{L}_X\tau$$

Prima di dimostrare la formula di Cartan, osserviamo che

$$\underbrace{(\mathcal{L}_X \sigma)}_{\substack{k\text{-forma} \\ \text{(o tensore} \\ \text{covariante..)}}}(Y_1 \ldots Y_k) = X(\sigma(Y_1 \ldots Y_k)) - \sigma([X, Y_1], Y_2 \ldots Y_k) - \ldots - \sigma(Y_1, \ldots, Y_{k-1}, [X, Y_k])$$

che, a sua volta, viene da

$$\underset{X[\sigma(Y_1 \ldots Y_k)]}{\underset{\parallel}{\mathcal{L}_X (\sigma(Y_1 \ldots Y_k))}} = (\mathcal{L}_X \sigma)(Y_1 \ldots Y_k) + \sigma(\mathcal{L}_X Y_1 \ldots Y_k) + \ldots + \sigma(Y_1 \ldots \mathcal{L}_X Y_k)$$

basta ricordare che $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

(4.(4))

in particolare

$$\underbrace{(\mathcal{L}_X dv)}_{1\text{-forma}}(Y) = X[dv(Y)] - dv([X, Y])$$

$$= XY(v) - [X, Y](v)$$

$$= (XY - XY + YX)(v) = Y\underbrace{X(v)}_{\mathcal{L}_X v}$$

ovvero $\mathcal{L}_X dv = d\mathcal{L}_X v$

corollario: se $(x_1 \ldots x_n)$ sono coordinate locali e $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (per fissare le idee) è $\mathcal{L}_X (dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k}) = 0$

Ciò segue subito da $\mathcal{L}_X dx_j = d\mathcal{L}_X x_j = d\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_1}\right) = d(\delta_{1j}) \equiv 0$

e dalla formula di Leibniz generalizzata.

$$\mathcal{L}_X(u\,dv) = \mathcal{L}_X u\,dv + u\,\mathcal{L}_X dv$$
$$= \mathcal{L}_X u\,dv + u\,d\mathcal{L}_X v$$
$$= X(u)\,dv + u\,d(X(v))$$

$$\mathcal{L}_X(u\,dv)(Y) = X(u)\,Y(v) + u\,Y(X(v)) \qquad \mathrm{I}$$

calcoliamo II =

$$(d\,i_X + i_X d)(u\,dv)(Y) =$$

$$= d(i_X(u\,dv))(Y) + i_X\,d(u\,dv)(Y) =$$

$$= d\Big(\underbrace{i_X u}_{=0}\,dv + u\,\underbrace{i_X dv}_{X(v)}\Big)(Y) + i_X\,du \wedge dv\,(Y)$$

$$= d(X(v)\,u)(Y) + X(u)Y(v) - X(v)Y(u)$$

$$= [d\,X(v)\,u](Y) + X(v)\,du(Y) + X(u)Y(v) - X(v)Y(u)$$

$$= u\,Y(X(v)) + \cancel{X(v)\,Y(u)} + X(u)Y(v) - \cancel{X(v)Y(u)}$$

$$= u\,Y\,X(v) + X(u)\,Y(v) = \mathrm{I}$$

✓

Nel caso generale si procede per induzione.

Esempio concreto (che però contiene le caratteristiche generali per fissare le idee)

(in $\mathbb{R}^3$)

$X = \dfrac{\partial}{\partial x}$

(I) $$\boxed{\omega = a \, dx \wedge dy}$$

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = -\frac{\partial a}{\partial z} dx \wedge dz \wedge dy$$

$$i_X d\omega = -\frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dy$$

$$i_X \omega = a \, dy$$

$$d(i_X \omega) = \frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \wedge dy$$

$$(i_X d + d i_X)\omega = \frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dy$$

Ma $$\mathcal{L}_X \omega = \frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dy + a \underbrace{\mathcal{L}_X dx}_{= d1 = 0} \wedge dy + a \, dx \wedge \underbrace{\mathcal{L}_X dy}_{= d.0 = 0}$$

(II) $$\boxed{\omega = a \, dy \wedge dz}$$

$$d\omega = \frac{\partial a}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$$

$$i_X d\omega = \frac{\partial a}{\partial x} dy \wedge dz$$

$$i_X \omega = 0 \qquad d \, i_X \omega + i_X d\omega = \frac{\partial a}{\partial x} dy \wedge dz$$

$$d \, i_X \omega = 0 \qquad \mathcal{L}_X \omega = \frac{\partial a}{\partial x} dy \wedge dz + \ldots 0$$