

OSS. Solitamente $e^- L < 0$ e $U > 0$.

OSS. $1 \in IF(\beta, t, L, U)$ con $L < 0 < U$.

Impelli

$$1 = \beta^1 \cdot \beta^{-1} = \beta^1 \cdot \sum_{i=1}^t d_i \cdot \beta^{-i} \quad \text{con}$$

$$d_1 = 1, \quad d_i = 0, \quad i = 2, \dots, t$$

ESERCIZIO Trovare gli elementi di $IF(2, 3, -1, 1)$ e rappresentarli sulla retta reale (bastano quelli positivi).

ESERCIZIO Sia $IF(10, 1, -1, 1)$. Trovare $x_{\min}$,

$x_{\max}$, $\text{card}(IF)$.

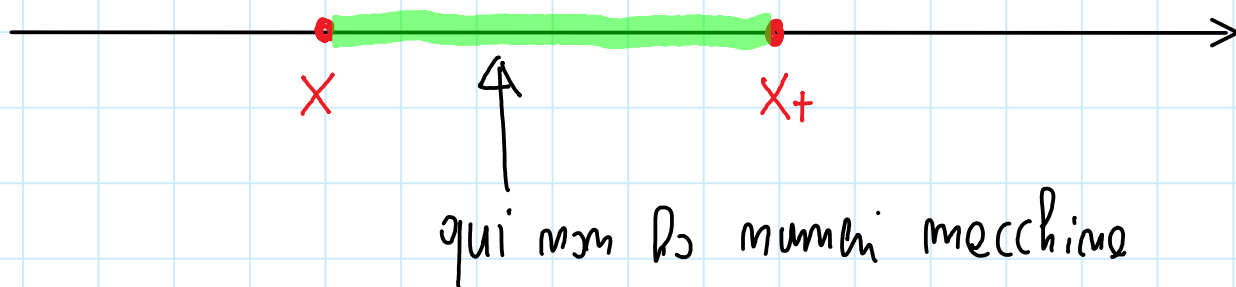
$$\hat{E} \quad x_{\min} = \beta^{L-1} = 10^{-1-1} = 10^{-2} = 0.01$$

$$x_{\max} = \beta^0 (1 - \beta^{-t}) = 10^0 \cdot (1 - 10^{-1}) = 10 \cdot 0.9 = 9$$

$$\begin{aligned}
 \text{card}(\mathbb{F}) &= 1 + 2(V - L + 1)(\beta - 1)\beta^{t-1} \\
 &= 1 + 2(1 - (-1) + 1)(10 - 1)10^{1-1} \\
 &= 1 + 2 \cdot 27 = 55.
 \end{aligned}$$

ESERCIZIO Sia $x \in \mathbb{F}(\beta, t, L, V)$ con $x > 0$.

Calcolare la distanza tra x e x_+ dove x_+ è il numero macchina successivo a x .



$$\left[\text{se } x = \beta^e \sum_{i=1}^t d_i \beta^{-i} \text{ allora } x_+ - x = \beta^{e-t} \right]$$

RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI REALI

NELL' INSIEME $F(\beta, t, L, U)$

Limitiamoci agli $x > 0$ (per i negativi otteniamo risultati analoghi).

Dato $F(\beta, t, L, U)$ esiste $x_{\min}$ e $x_{\max}$.

Dato $x \in \mathbb{R}$ ci sono allora tre possibilità.

(1) $x > x_{\max}$. x eccede la capacità di F . Di
solito viene prodotto un messaggio di
errore e il valore si blocca.

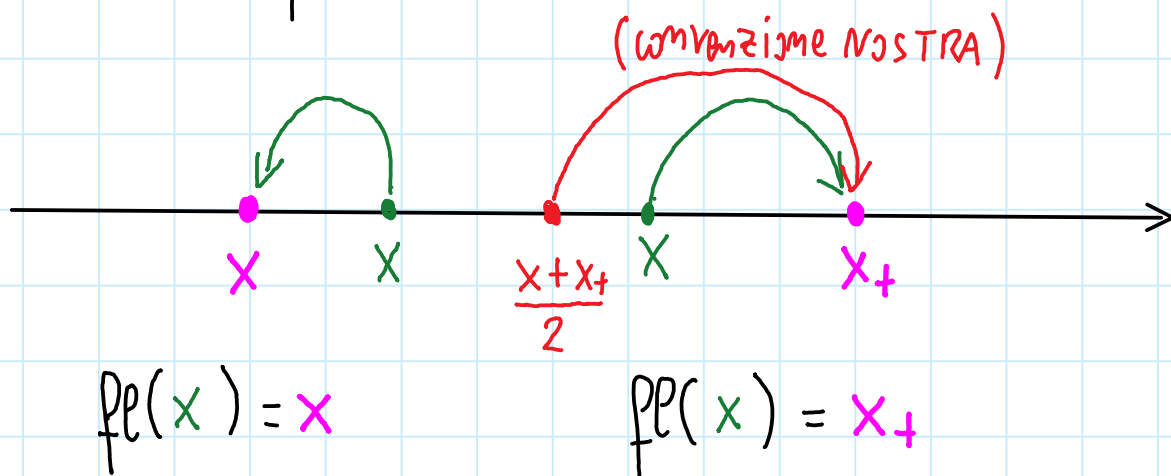
(2) $x < x_{\min}$. x viene rappresentato col numero
 $fl(x) = 0$. Viene prodotto un avviso
(warning). Questo a prescindere
dei NUMERI DENORMALIZZATI.

(3) $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Ho due casi.

(3.1) $x \in IF(\beta, t, L, U)$. Allora lo rappresento con

$$fp(x) = x.$$

(3.2) $x \notin IF(\beta, t, L, U)$. Lo arrotondo al numero
 macchina più vicino.



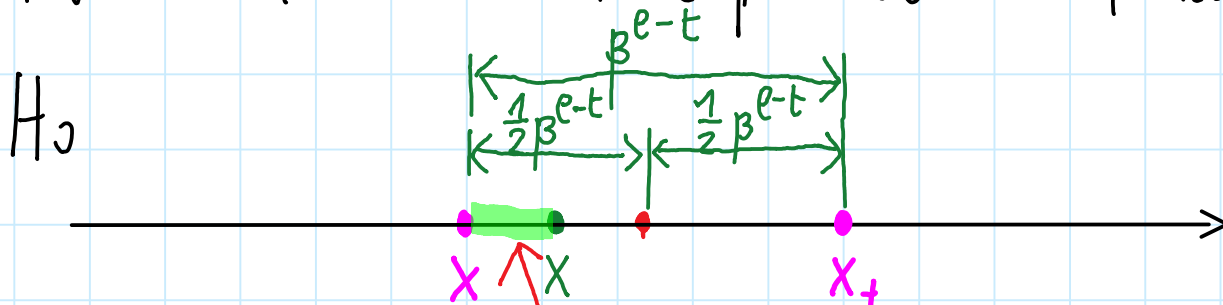
OSS. Nel caso (3.2) viene commesso un errore perché $fp(x) \neq x$ detto ERRORE DI ARROTONDAMENTO.

TO. Definiamo, per $x \neq 0$, l'errore relativo

$$E_{rel} = \frac{x - fp(x)}{x}$$

Notiamo che ϵ_{rel} è sia positivo ($x < \frac{x+x_+}{2}$) che negativo ($x \geq \frac{x+x_+}{2}$). Questo aspetto facilita la comprensione degli errori quando eseguiamo più operazioni.

Vediamo di dare una stima per eccesso di $|\epsilon_{rel}|$.



$$|\epsilon_{rel}| = \left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{\frac{1}{2} \beta^{e-t}}{|x|}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{2} \beta^{e-t}}{\beta^e \sum d_i \beta^{-i}} \leq \frac{\frac{1}{2} \beta^{e-t}}{\beta^e \cdot 1 \cdot \beta^{-1}} = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$$

assumendo $x \in \left[\underbrace{\beta^e \sum_{i=1}^t d_i \beta^{-i}}_x, \underbrace{\beta^e \left(\sum_{i=1}^t d_i \beta^{-i} + \beta^{-t} \right)}_{x_+} \right]$

In conclusione è

$$|e_{rel}| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t}$$

DEF. Il numero $\mu = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$ è detto PRECISIONE DI
MACCHINA.

OSS. Da

$$|e_{rel}| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t} = \mu$$

ottengo

$$\left| \frac{x - fl(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{2} \beta^{1-t} = \mu$$

ossia esiste $\epsilon \in [-\mu, \mu]$ tale che

$$\frac{x - fl(x)}{x} = \epsilon \quad \Rightarrow \quad x - fl(x) = \epsilon x \quad \Rightarrow$$

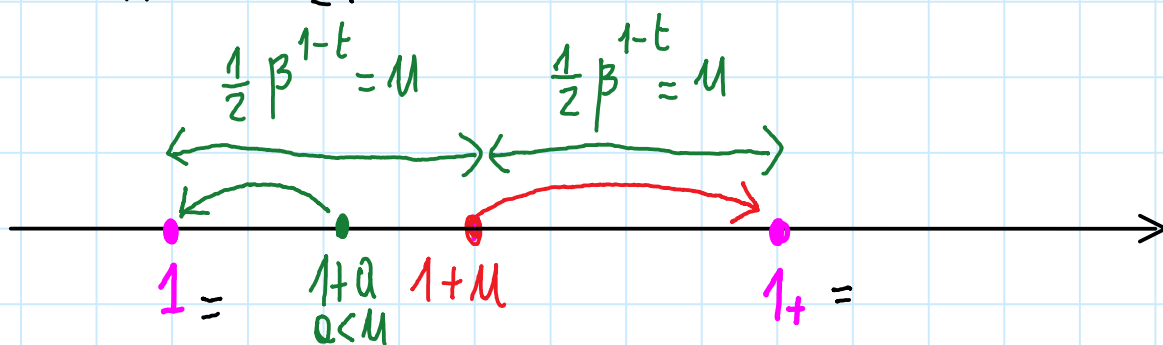
$$\begin{aligned} fl(x) &= x(1 - \epsilon) \quad , \quad |\epsilon| \leq \mu \\ &= x(1 + \epsilon) \quad , \quad |\epsilon| \leq \mu \end{aligned}$$

OSS. La precisione di macchina u è il più piccolo numero positivo tale che

$$1 + u = 1_+$$

ossia è il più piccolo numero positivo da sommare a 1 per ottenere il numero macchina successivo.

Sia $0 < 1$.



$$= \beta^1 \left(1 \cdot \beta^{-1} + 0 \cdot \beta^{-2} + \dots + 0 \cdot \beta^{-t} \right)$$

$$= \beta^1 \left(1 \cdot \beta^{-1} + 0 \cdot \beta^{-2} + \dots + 1 \cdot \beta^{-t} \right)$$

$$\Rightarrow 1_+ - 1 = \beta^{1-t}$$

ESEMPLO Sia $IF(10, 2, -3, 3)$.

(a) Calcoliamo μ . $\hat{E}$

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-t} = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-2} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} = 0.05$$

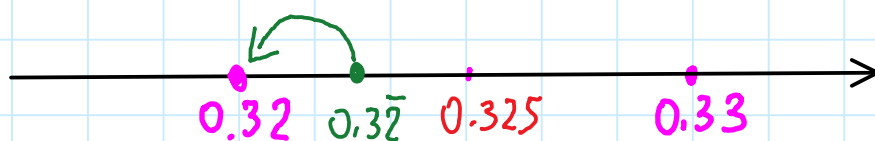
(b) Calcoliamo

$IF(10, 2, -3, 3)$

$$pf(0.32) = pf(10^0 \cdot 0.32) = 10^0 \cdot 0.32 = 0.32$$

$$\hat{E} \quad e_{rel} = \frac{0.32 - pf(0.32)}{0.32} = 0$$

$$pf(0.3\bar{2}) = pf(10^0 \cdot 0.3222222\ldots) = 10^0 \cdot 0.32 = 0.32$$



c'è l'errore

$$\begin{aligned} |e_{rel}| &= \left| \frac{x - pf(x)}{x} \right| = \left| \frac{0.3\bar{2} - 0.32}{0.3\bar{2}} \right| = \left| \frac{0.00\bar{2}}{0.3\bar{2}} \right| = \\ &= \frac{2}{290} \approx 7 \cdot 10^{-3} < \mu \end{aligned}$$

$$fl(0.375) = 0.38$$

5 ≥ 5

$$fl(0.374) = 0.37$$

4 < 5

OPERAZIONI DI MACCHINA

Si definiscono per $x, y \in IF(\beta, t, L, U)$

$$x \oplus y \stackrel{(def)}{=} fl(x + y)$$

$$x \ominus y \stackrel{(def)}{=} fl(x - y)$$

$$x \odot y \stackrel{(def)}{=} fl(x \cdot y)$$

$$x \oslash y \stackrel{(def)}{=} fl(x / y)$$

operazioni in $\mathbb{R}$

Nota che se $x, y \in IF(\beta, t, L, U)$ NON è detto che $x + y, x - y, x \cdot y, x / y$ sia ancora in IF !!

Ad esempio sia $x = 0.11 \in \mathbb{F}(10, 2, -3, 3)$. Allora è (*)

$$x \oplus x = fl(0.11 + 0.11) = fl(0.22) = 0.22$$

$$x \odot x = fl(0.11 \cdot 0.11) = fl(\cancel{0.121}) = 0.12 \rightarrow \bar{e}t = 2!!$$

Ho un errore nell'eseguire il prodotto!!

Analogamente, se ho $x = 900$ allora $x \oplus x$ dà

OVERFLOW.

N.B. I numeri positivi di

$\mathbb{F}(10, 2, -3, 3)$ sono tutti e

soli quelli che si scrivono come

$$x = 10^e \sum_{i=1}^2 d_i 10^{-i} = 10^e (d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2})$$

$$= 10^e (0.d_1 d_2) \text{ con } d_1 \geq 1 \text{ ed}$$

$$e \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$