

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

12 Febbraio 2015

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	15	
problema 2	15	
totale	30	

1. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $\Sigma_{uo} = \{a\}$, $L(G) = \overline{a^*ba^*}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare a^*ba^*), $L_m(G) = a^*ba^*$.

Si supponga che la specifica (il linguaggio generato desiderato) sia $K = \overline{\{a^*b\}} \subseteq L(G)$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe della espressione regolare a^*b), per cui si richiede che l'impianto controllato generi prefissi di stringhe dove nessuna a segue l'eventuale b .

- (a) Il linguaggio K e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Traccia di soluzione

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Si applichi la definizione al nostro esempio dove $M = L(G)$. Si consideri una stringa $s \in \overline{K} = K$,

- se $s = a^*$ e quindi $s\sigma = sb = a^*b \in L(G)$ allora $s\sigma = sb \in \overline{K}$, altrimenti
- se $s \neq a^*$ allora $s\sigma = sb \notin L(G)$ (cioe' se s deve essere della forma $s = a^kb$ e quindi $sb = a^kbb \notin L(G)$, poiche' le parole in $L(G)$ non possono contenere un secondo evento b dopo il primo).

Percio' non esiste una stringa $s \in \overline{K}$ tale che $s\sigma = sb \in L(G) \setminus \overline{K}$, cioe' K e' controllabile.

(b) Il linguaggio K e' osservabile ? Si enunci la definizione di osservabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Esiste una strategia di controllo ? La si descriva, se esiste.

Traccia di soluzione.

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E . Sia $E_c \subseteq E$ l'insieme degli eventi controllabili. Sia $E_o \subseteq E$ l'insieme degli eventi osservabili con P la proiezione da E^* a E_o^* .

Si dice che K e' osservabile rispetto a M, P, E_c , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_c$,

$$s\sigma \notin \overline{K} \wedge s\sigma \in M \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \emptyset.$$

Si applichi la definizione al nostro esempio dove $M = L(G)$, $\sigma = a$.

Consideriamo i prefissi di K del tipo $s = a^*$. Si ha $s\sigma = a^*a \in \overline{K}$ e $s\sigma = a^*a \in M$, che falsifica l'antecedente e rende vera l'implicazione.

Consideriamo i prefissi di K del tipo $s = a^*b$. Si ha $s\sigma = a^*ba \notin \overline{K}$ e $s\sigma = a^*ba \in M$, ma $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K} = \emptyset$, $[P(a^*b) = b, P^{-1}[P(a^*b)] = a^*b]$, $P^{-1}[P(a^*b)]a = a^*ba \notin \overline{K}$ che rende vero l'antecedente e il conseguente e percio' rende vera l'implicazione.

Percio' K e' osservabile.

Ripetiamo la verifica in modo piu' intuitivo (guidati dallo scopo di definire una strategia di controllo, se possibile). Si considerino le stringhe $s, t \in \overline{K}$ tali che $P(s) = P(t)$. Allora o $s, t \in a^*$, o $s, t \in a^*b$. Se $s, t \in a^*$, allora sia a che b sono abilitati dopo entrambe s e t . Se $s, t \in a^*b$, allora dopo entrambe s e t si deve disabilitare a (mentre b non puo' essere prodotto dall'impianto).

Strategia di controllo: all'inizio sono abilitati sia a che b (b e' sempre abilitato perche' incontrollabile) e si mantengono abilitati fino alla comparsa di b , dopo di che si disabilita a .

- (c) Si consideri la seguente variante dell'inosservabilit : si elimina l'ipotesi che l'evento a   inosservabile, ma s'introduce l'ipotesi che gli eventi a e b sono indistinguibili, cio  esiste una proiezione P tale che $P(a) = P(b) \neq \epsilon$ (vuol dire che si vede che l'impianto produce un evento, ma non si sa se produce a o b). K   osservabile ?

Esiste una strategia di controllo ? La si descriva, se esiste.

Traccia di soluzione.

Consideriamo $s = b \in \overline{K}$, $\sigma = a$. Si ha $s\sigma = ba \notin \overline{K}$ e $s\sigma = ba \in M$, ma $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K} = \{b, a\}a \cap \overline{K} = \{ba, aa\} \cap \overline{K} = \{aa\} \neq \emptyset$, che rende vero l'antecedente e falso il conseguente e perci  rende falsa l'implicazione.

Ripetiamo la verifica in modo piu' intuitivo (guidati dallo scopo di definire una strategia di controllo, se possibile). Si considerino le stringhe $s = a \in \overline{K}$ e $t = b \in \overline{K}$, allora $aa \in \overline{K}$, ma $ba \in L(G) \setminus \overline{K}$. Perci  le stringhe a e b sono indistinguibili ($P(a) = P(b) \neq \epsilon$), eppure esse richiederebbero una strategia di controllo diversa: dopo a si dovrebbe abilitare a (b sarebbe abilitato per l'ipotesi che non   controllabile), dopo b si dovrebbe disabilitare a , quindi non esiste una medesima strategia di controllo valida per entrambe le stringhe indistinguibili $s = a$ e $t = b$.

Perci  K non   osservabile e non esiste una strategia di controllo.

2. Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove P sono i posti, T le transizioni, A gli archi, w la funzione di peso sugli archi, e x il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione t_i , $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione t_j .

Per associare un linguaggio a una rete di Petri s'introduce un insieme di eventi E , una funzione che etichetta le transizioni con eventi $l : T \rightarrow E$, e un insieme di stati che accettano $X_m \subseteq N^n$ (n e' il numero di posti).

Si consideri la rete di Petri P_{g421a} definita da:

- $P = \{p_1\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_2), (t_1, p_1)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$
- $l(t_1) = a, l(t_2) = b$
- $X_m = \{[0]\}$

Sia $x_0 = [0]$ la marcatura iniziale.

- (a) Si disegni il grafo della rete di Petri P_{g421a} .

(b) Si descriva il linguaggio L generato dalla rete di Petri.

Si descriva il linguaggio L_m accettato (o marcato) dalla rete di Petri.

Traccia di soluzione.

L sono le parole associate alle sequenze di scatti abilitate dalla marcatura iniziale.

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall v \prec w : |v|_a \geq |v|_b\}$ cioè l'insieme delle parole tali che in ogni loro prefisso il numero di a è maggiore o uguale al numero di b .

L_m sono le parole associate alle sequenze di scatti abilitate dalla marcatura iniziale, e che raggiungono una marcatura finale. Si noti che nel nostro esempio la marcatura finale è $X_m = \{[0]\}$.

$L_m = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ cioè l'insieme delle parole generate che contengono un numero uguale di a e di b .

(c) E' noto che il linguaggio generato o accettato da un automa a stati finiti puo' essere accettato da una rete di Petri in cui a ogni stato dell' automa x_1, x_2, \dots corrisponde un posto p_1, p_2, \dots , a ogni transizione dell' automa $\delta(x_i, \sigma) = x_j$ corrisponde una transizione con etichetta σ con un arco in ingresso da p_i e uno in uscita verso p_j . e infine allo stato iniziale x_1 corrisponde la marcatura iniziale con un gettone in p_1 .

Se ad ogni automa a stati finiti puo' farsi corrispondere una rete di Petri. e' vero anche che a ogni rete di Petri puo' farsi corrispondere un automa a stati finiti ? Se non e' sempre vero, sotto quale condizione e' vero ?

Si disegni la seguente rete di Petri:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_2, t_3), (p_3, t_4), (t_1, p_2), (t_2, p_1), (t_3, p_3), (t_4, p_1)\}$
- $\forall i, j \ w(p_i, t_j) = 1$
- $\forall i, j \ w(t_i, p_j) = 1$
- $l(t_1) = \sigma_1, l(t_2) = \sigma_2, l(t_3) = \sigma_3, l(t_4) = \sigma_4$

Sia $x_0 = [1, 0, 0]$ la marcatura iniziale.

Esiste un automa a stati finiti che corrisponde a questa rete di Petri ? Se no, si spieghi il perche', se si lo si disegni.

Traccia di soluzione.

Le reti di Petri sono piu' espressive degli automi a stati finiti. Esse corrispondono ad automi a stati finiti quando hanno un numero finito di marcature raggiungibili, cioe' il numero di nodi del grafo di raggiungibilita' e' finito, che e' equivalente alla proprieta' che la rete di Petri e' limitata.

E' sufficiente ma non necessario che la rete di Petri sia una macchina a stati (SM, State Machine: ogni transizione ha esattamente un posto in ingresso e uno in uscita). Naturalmente si possono individuare altre condizioni sufficienti.

L' automa a stati finiti corrispondente e'

- $X = \{x_1, x_2, x_3\}$
- $E = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$
- $\Delta = \{\delta(x_1, \sigma_1) = x_2, \delta(x_2, \sigma_2) = x_1, \delta(x_2, \sigma_3) = x_3, \delta(x_3, \sigma_4) = x_1\}$
- x_1 stato iniziale

(d) Si enunci la definizione di rete di Petri limitata.

La rete di Petri P_{g421a} e' limitata ? Si giustifichi la risposta.

Traccia di soluzione.

Un posto di una rete marcata e' limitato se esiste un intero $k \geq 0$ tale che, per ogni marcatura raggiungibile, il numero di gettoni del posto e' $\leq k$.

Una rete marcata e' limitata se ogni posto e' limitato.

La rete di Petri P_{g421a} non e' limitata perche' si possono accumulare infiniti gettoni nell'unico posto.

(e) Si enunci la definizione di rete di Petri reversibile.

La rete di Petri P_{g421a} e' reversibile ? Si giustifichi la risposta.

Traccia di soluzione.

Una rete marcata si dice reversibile se da ogni marcatura raggiungibile e' possibile ritornare alla marcatura iniziale.

La rete di Petri P_{g421a} e' reversibile perche' da una qualsiasi marcatura raggiungibile $x_k = [k]$ si puo' raggiungere la marcatura iniziale $x = [0]$, facendo scattare k volte la transizione t_2 .