Compito di logica (m)

AA 2012/2013, prova

Esercizio 1: Dimostrare le seguenti ricorrendo alle regole di $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$ più le regole dell'identità:

Gli enunciati che eventualmente precedono $\vdash$ sono le premesse, quello che segue è la conclusione).

1.1 $\mathsf{P}, \mathsf{Q} \vee (\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \vdash \mathsf{Q}$
1.2 $\vdash \neg\mathsf{P} \to (\mathsf{P} \to \mathsf{Q})$
1.3 $\neg\mathsf{Q} \vee \neg\mathsf{P} \vdash \mathsf{P} \to \neg\mathsf{Q}$
1.4 $\mathsf{Cube(a)}, \neg\mathsf{Cube(a)} \vee \neg\mathsf{Cube(b)} \vdash \mathsf{a} \neq \mathsf{b}$

Esercizio 2: Stabilire se nei seguenti la conclusione è o no conseguenza tautologica delle premesse.

2.1 Premesse: $\neg(\mathsf{P} \wedge \neg\mathsf{Q}), \neg\mathsf{Q}$. Conclusione: $\neg\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$
2.2 Nessuna premessa. Conclusione: $\neg\mathsf{P} \vee (\mathsf{Q} \to \mathsf{P})$
2.3 Premessa: $(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q} \vee \mathsf{R} \vee \mathsf{S} \vee \mathsf{T} \vee \mathsf{V}) \to (\mathsf{Z} \wedge \neg\mathsf{Z})$. Conclusione: $\neg\mathsf{R}$

Esercizio 3: Partendo dai seguenti enunciati, giungere a un enunciato in forma normale (disgiuntiva o congiuntiva, secondo la richiesta) mediante successiva applicazione di note equivalenze quali le leggi di De Morgan, $(\mathsf{A} \to \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A} \vee \mathsf{B})$, ecc.

3.1 $\mathsf{P} \leftrightarrow \neg(\mathsf{Q} \wedge \mathsf{P})$ (Forma normale congiuntiva)
3.2 $(\neg\mathsf{P} \vee \neg\mathsf{Q}) \to \neg(\mathsf{P} \to \mathsf{Q})$ (Forma normale disgiuntiva)

Esercizio 4: Tradurre le seguenti in un linguaggio del primo ordine:

Ad es., 'Ada ama qualche greco' può essere reso come $\exists \mathsf{x}(\mathsf{Ama(ada, x)} \wedge \mathsf{Greco(x)})$

4.1 Ada invidia almeno due tedeschi.
4.2 Nessuno ama Ada tranne Bice.
4.3 Ogni alpinista greco è triste.
4.4 Ci sono al più due alpinisti tristi.

Esercizio 5: Descrivere a grandi linee la dimostrazione di validità (soundess) di $\mathcal{F}_{\mathsf{T}}$.

Esercizio 6: Delineare l'argomento della nave di Teseo (discusso a lezione e presente negli appunti). Darne una versione schematica usando il sistema $\mathcal{F}$.

Note e (possibili) soluzioni di esercizi scelti.

Problema 1.4

1	$\mathsf{Cube(a)}$	
2	$\neg\mathsf{Cube(a)} \lor \neg\mathsf{Cube(b)}$	
3	$\mathsf{a = b}$	
4	$\mathsf{Cube(b)}$	$=$ Elim 1, 3
5	$\neg\mathsf{Cube(a)}$	
6	$\bot$	$\bot$ Intro 1, 5
7	$\neg\mathsf{Cube(b)}$	
8	$\bot$	$\bot$ Intro 4, 7
9	$\bot$	$\lor$ Elim 2, 5–6, 7–8
10	$\mathsf{a \neq b}$	$\neg$ Intro 3–9.

Dato il numero di enunciati atomici in gioco nel problema 2.3, può essere consigliabile risolverlo *non* (come per gli altri problemi dell'esercizio 2) mediante le tavole di verità ma nel seguente modo:

Problema 2.3 Per il teorema di completezza, sappiamo che se $\neg\mathsf{R}$ è derivabile in $\mathcal{F}_{\mathsf{T}}$ dalla premessa $(\mathsf{P} \lor \mathsf{Q} \lor \mathsf{R} \lor \mathsf{S} \lor \mathsf{T} \lor \mathsf{V}) \to (\mathsf{Z} \land \neg\mathsf{Z})$ allora segue tautologicamente da quella premessa. Per dimostrare che $\neg\mathsf{R}$ segue tautologicamente dalla premessa è dunque sufficiente produrre una derivazione di $\neg\mathsf{R}$ dalla premessa. Eccola:

1	$(\mathsf{P} \lor \mathsf{Q} \lor \mathsf{R} \lor \mathsf{S} \lor \mathsf{T} \lor \mathsf{V}) \to (\mathsf{Z} \land \neg\mathsf{Z})$	
2	R	
3	$\mathsf{P} \lor \mathsf{Q} \lor \mathsf{R} \lor \mathsf{S} \lor \mathsf{T} \lor \mathsf{V}$	$\lor$ Intro 2
4	$\mathsf{Z} \land \neg\mathsf{Z}$	$\to$ Elim 1, 3
5	Z	$\land$ Elim 4
6	$\neg\mathsf{Z}$	$\land$ Elim 4
7	$\bot$	$\bot$ Intro 4,5
8	$\neg\mathsf{R}$	$\neg$ Intro 2–7.

Rispetto al problema 4.1, “Ada invidia almeno due tedeschi” equivale ad “Almeno un tedesco x e un tedesco y sono tali che $\mathsf{x} \neq \mathsf{y}$ e che Ada invidia x e invidia y”, ossia:

Problema 4.1: $\exists x \exists y (x \neq y \land \mathsf{Invidia}(\mathsf{ada}, x) \land \mathsf{Invidia}(\mathsf{ada}, y))$

Rispetto al problema 4.4, “Ci sono al più due alpinisti tristi” equivale a “C’è un alpinista triste x e un alpinista triste y (non necessariamente distinti) e ogni alpinista triste è identico o a x o a y, ossia:

Problema 4.4:

$$\exists x \exists y (\mathsf{Alp}(x) \land \mathsf{Tr}(x) \land \mathsf{Alp}(y) \land \mathsf{Tr}(y) \land \forall z ((\mathsf{Alp}(z) \land \mathsf{Tr}(z)) \rightarrow (z = x \lor z = y)))$$

Esercizio 5: Si deve mostrare che, tutte le volte che in $\mathcal{F}_\mathsf{T}$ una certa conclusione è derivabile da un certo insieme di premesse, la conclusione è conseguenza tautologica dell’insieme. A questo fine, si deve dimostrare un risultato più forte, che chiameremo ‘Lemma 1’, da cui la validità di $\mathcal{F}_\mathsf{T}$ evidentemente segue. Il Lemma 1 dice che ogni enunciato che compare a un passo di una (possibile) derivazione è conseguenza tautologica degli enunciati in forza a quel passo. Chiamiamo ‘passo invalido’ un passo in cui compare un enunciato che non è conseguenza tautologica degli enunciati in forza a quel passo. Se esiste un passo invalido in qualche derivazione, deve esistere un *primo* passo invalido. Se esiste un primo passo invalido, allora qualche regola di $\mathcal{F}_\mathsf{T}$ deve permetterci di introdurre un primo passo invalido. Considerando ad una ad una le regole di $\mathcal{F}_\mathsf{T}$, tuttavia, si dimostra che nessuna di esse può introdurre un primo passo invalido.