

Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 2

Integrazione - Funzioni di due o più variabili reali - Equazioni differenziali

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Martedì 22 gennaio 2013

Degli esercizi indicati con (*) viene di seguito fornita la risoluzione dettagliata.

(1) Integrazione.

Si calcolino i seguenti integrali definiti:

$$\begin{aligned} \text{(1.a)} \quad & \int_0^4 \sqrt{x} e^{1+\sqrt{x}} dx, & \text{(1.b)} \quad & \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 5} dx, & \text{(1.c)} \quad & \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2 - 6x + 9} dx, \\ \text{(1.d)}^* \quad & \int_0^1 e^{-x} (x^2 + \sin 2x) dx, & \text{(1.e)}^* \quad & \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} \text{ (porre } x = \operatorname{tg} t), & \text{(1.f)} \quad & \int_{-1}^0 \frac{e^{3t}}{e^t + 1} dt, \\ \text{(1.g)}^* \quad & \int_1^2 \frac{t^2 - 2 - (2t+1) \log(3-t)}{2t^2 - 5t - 3} dt, & \text{(1.h)} \quad & \int_0^1 x^3 \log(x^2 + 3) dx, & \text{(1.i)}^* \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 + \cos^2 x} dx, \\ \text{(1.j)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\cos u} - u) \sin u du, & \text{(1.k)} \quad & \int_1^9 \frac{\log(2\sqrt{x}-1)}{2x-\sqrt{x}} dx, & \text{(1.l)} \quad & \int_1^e \frac{\operatorname{arctg}(1-2\log x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Studiare l'andamento di $f(x)$, dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ è definito $\int_a^b f(x) dx$ e calcolarne il valore.

$$\text{(1.m)} \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}, \quad \text{(1.n)}^* \quad f(x) = 2 \log |x| + \sqrt{x+2}, \quad \text{(1.p)} \quad f(x) = x(e^x - 1) - 1.$$

Si disegnino le seguenti regioni finite del piano cartesiano (x, y) e si calcolino le loro aree.

$$\begin{aligned} \text{(1.q)} \quad & S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(x - \pi) \leq y \leq x \sin x, y \geq 1 - \pi\}; \\ \text{(1.r)} \quad & S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + x)y \leq 2, |y| \leq 1, |x| \leq 3\}; \\ \text{(1.s)}^* \quad & S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \log(1 - xy) \leq 0, |y - 2x| \leq 1\}; \\ \text{(1.t)} \quad & S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2y - 3 \leq x \leq 1 + \cos 2y, -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

(2) Funzioni di due o più variabili reali.

(2.a) Data la funzione $f(x, y) = 1 + \log |y(x^2 - 2)|$, si determinino il dominio naturale, i punti nei quali si annulla e quelli in cui è positiva, disegnando tali insiemi sul piano cartesiano. Si ragioni sui limiti notevoli di f . f è limitata? Dove è differenziabile? Calcolare il differenziale totale df , la funzione lineare tangente di f (il cui grafico è il piano tangente al grafico di f) e la forma

cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f nei punti $A = (1, 1)$ e $B = (-1, 2)$. Calcolare le derivate parziali seconde di f , verificando il teorema di Schwarz.

(2.b) Stesse domande per $g(x, y) = \frac{\sqrt{x-y^2}-x}{x+2}$, con $A = (2, -1)$ e $B = (4, 0)$.

(2.c)* Stesse domande per $h(x, y) = x \operatorname{tg}(xy^3)$, con $A = (0, 0)$ e $B = (\frac{\pi}{4}, 1)$.

(2.d)* Stesse domande per $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}(|2x + y - 1| - y)$, con $A = (1, 1)$ e $B = (-1, \frac{3}{2})$.

(2.e) Stesse domande per $m(x, y) = \frac{x}{\sqrt{|1-x^2-2y^2|}}$ con $A = (0, 0)$ e $B = (-3, 2)$.

(2.f) In quali punti $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il piano tangente al grafico di $f(x, y) = x^4 - 4x^3 - 4xy - y^2 + x$ in P_0 è parallelo al piano di equazione cartesiana $z = 5x + 2y + 1$? Calcolare la forma cartesiana e parametrica del piano tangente al grafico di f in ognuno dei punti trovati.

(2.g) Data $f(x, y) = x \log y$ descriverne il dominio, gli zeri, il segno, i limiti notevoli. Come sono fatte le sue curve di livello $f(x, y) = k$? Disegnare la curva di livello passante per $A(0, 1)$ e quella passante per $B(-1, e)$. Calcolare i vettori gradienti $\nabla f(A)$ e $\nabla f(B)$, e notare come sono diretti rispetto alle suddette curve di livello.

(2.h)* Determinare la funzione $f(x, y)$ sapendo che ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$, e che vale $f(0, 2) = -1$. Stesso problema per $g(x, y)$, sapendo che $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2y \sin xy - 3y^2 + 8$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$, e che vale $g(-1, 0) = -3$.

(2.i)* Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$. Disegnare poi gli insiemi chiusi e limitati $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ e $B = \{(t, -2) : |t| \leq 2\}$, e determinare il massimo e minimo assoluti di f su ciascuno di essi.

(2.l) Ricercare eventuali punti di massimo e minimo locale della funzione $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = \frac{x^2 e^{-y^2}}{1 + x^4}$. Poi, notando (e se possibile dimostrando) che $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2} g(x, y) = 0$, spiegare perché g deve ammettere estremi assoluti su tutto il dominio $\mathbb{R}^2$ anche se quest'ultimo non è limitato (e dunque non si può applicare Weierstrass), e dire quanto valgono.

(2.m) Disegnare l'insieme $K = \{(x, y) : y^2 - 2y \leq x \leq 1\}$, calcolarne l'area e determinare massimo e minimo assoluti su di esso della funzione $h(x, y) = 3x + 4y$, cercando poi di spiegare quest'ultimo risultato con un ragionamento grafico.

(3) Equazioni differenziali.

(3.a) Data l'equazione differenziale $yy' = xe^{-y^2}$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. (Facoltativo: si dica in quali zone del piano le soluzioni sono convesse; si dimostri che le soluzioni sono funzioni pari.¹) Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(0) = -1$.

(3.b) Data l'equazione differenziale $2(x-2)y' = x(y^2+4)$ si dica quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti, ed in quali zone del piano sono convesse. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = 0$.

¹Se $\varphi(x)$ è una soluzione, si ponga $\psi(x) = \varphi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$, si mostri che anche $\psi(x)$ è soluzione; poi, notando che $\psi(0) = \varphi(0) = \varphi(0)$...

(3.c)* Data l'equazione differenziale $y^2 y' \sin^2 x + (y^3 + 1) \cos x = 0$ si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Si calcoli poi la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$, e quella con condizione iniziale $y(-3) = -1$.

Risolvere le seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

(3.d) $(x+1)y' - y = \log x, \quad y(1) = 0.$

(3.e) $xy' + (x+1)y = -2 - 2x, \quad y(1) = -1$ oppure $= -2$ (fare anche come variabili separabili)

(3.f)* $y' \sin x + y \cos x = \sin 2x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ oppure $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$. Per quali y_0 e y_1 si possono prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate ottenendo una funzione derivabile?

Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

(3.g) $y'' + 2y' - 3y = 2e^x - \cos 2x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$

(3.h)* $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$

(3.i) $y'' + 2y' + 5y = 2e^x \sin 2x + \sin x - 5, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

Risolvere i seguenti problemi tramite un'opportuna equazione differenziale.

(3.j) Una pallina di massa m , vincolata a stare su una guida rettilinea verticale liscia, è soggetta alla propria forza peso ed è trattenuta anche da una molla di costante elastica k ; il tutto è immerso in un fluido di viscosità β . Calcolare la legge oraria del moto nei casi $(m, k, \beta) = (1, 2, 3)$ e $(m, k, \beta) = (1, 2, 2)$, supponendo che all'istante iniziale la pallina venga lasciata con velocità nulla nel punto in cui è anche attaccata la molla;² cercare poi di interpretare i risultati alla luce del buon senso. Se si vuole, discutere anche il caso di m, k, β qualunque.

(3.k) La velocità di crescita di una colonia di batteri è, in ogni istante, direttamente proporzionale al tempo che passa e inversamente proporzionale all'entità della colonia stessa. Sapendo che all'istante iniziale dell'esperimento erano stati messi assieme 4 batteri, e che dopo 4 secondi questi erano raddoppiati, calcolare quanti ve ne saranno dopo un'ora.

(3.l)* La sera di San Silvestro, un gruppo di amici decide di lanciare in aria un candelotto di fuochi artificiali per festeggiare l'anno nuovo. Il candelotto ha massa 1 kg, e dunque è soggetto ad una forza di gravità di (circa) 10 Newton; al momento dell'accensione esso viene spinto da una forza verso l'alto pari a 150 Newton, che decresce proporzionalmente al tempo e si esaurisce dopo 5 secondi. L'aria oppone una resistenza di tipo viscoso con coefficiente pari a 1 Newton-sec/m. Sapendo che il candelotto contiene un meccanismo programmato per causare l'esplosione dopo 3 secondi dallo spegnimento della forza propulsiva (dunque, in tutto, dopo 8 secondi dalla partenza), si dica a che altezza dal suolo (arrotondata al metro) esploderà il candelotto.

²Tutte le grandezze sono espresse nelle unità di misura del sistema internazionale standard MKS, e dunque la massa m è espressa in kg, la costante elastica k in Newton/m, il coefficiente di viscosità β in Newton-sec/m, e l'accelerazione di gravità g (che, se si vuole, si può arrotondare per comodità a 10) in m/sec^2 . Naturalmente, converrà porre sulla guida rettilinea un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto, supponendo che la molla sia imperniata in 0: la domanda è dunque di determinare la funzione $x(t)$.

Alcune soluzioni.

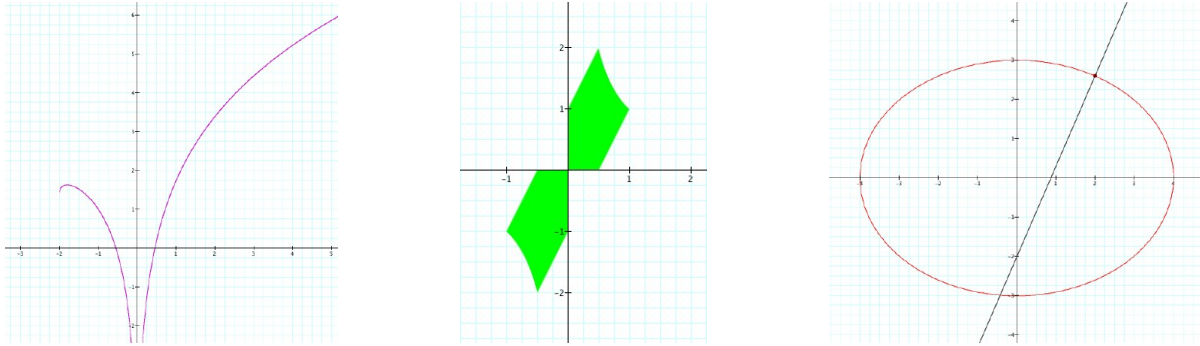
(1) Integrazione.

(1.d) Vale $\int e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx = \int x^2 e^{-x} dx + \int e^{-x} \sin 2x dx$; integrando per parti si ottiene $\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} + \int e^{-x} dx) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + k$, e $\int e^{-x} \sin 2x dx = -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx = -e^{-x} \sin 2x + 2(-e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx)$, da cui $5 \int e^{-x} \sin 2x dx = -e^{-x} \sin 2x - 2e^{-x} \cos 2x$, da cui $\int e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{1}{5} e^{-x} (\sin 2x + 2 \cos 2x) + k$. Pertanto $\int e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2 + \frac{\sin 2x + 2 \cos 2x}{5}) + k$, e $\int_0^1 e^{-x}(x^2 + \sin 2x) dx$ basta sottrarre i valori di tale primitiva negli estremi 1 e 0.

(1.e) Da $x = \operatorname{tg} t$ si ha $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$; se $x = 0$ si ha $t = 0$, e se $x = 1$ si ha $t = \frac{\pi}{4}$, dunque $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^4 t}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = (\frac{t + \sin t \cos t}{2}) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = (\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}{2}) - (0) = \frac{\pi + 2}{8}$.

(1.g) Si ha $t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3)$, dunque $\int \frac{t^2 - 2 - (2t + 1) \log(3 - t)}{2t^2 - 5t - 3} dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} dt + \int \frac{\log(3 - t)}{t - 3} dt$. Iniziamo calcolando $\int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} dt$: dividendo si ha $\frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} = \frac{1}{2} (1 + \frac{5t - 1}{2t^2 - 5t - 3})$, e poi $\frac{5t - 1}{2t^2 - 5t - 3} = \frac{1}{2t + 1} + \frac{2}{t - 3}$, pertanto $\int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 5t - 3} dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \log |2t + 1| + 2 \log |t - 3|) + k$. Passando poi a $\int \frac{\log(3 - t)}{t - 3} dt$, poniamo $\tau = 3 - t$, da cui (sostituendo e integrando per parti) si ottiene $d\tau = -dt$: si ha allora $\int \frac{\log(3 - t)}{t - 3} dt = \int \frac{\log \tau}{\tau} d\tau = \log^2 \tau - \int \frac{\log \tau}{\tau} d\tau$, da cui $\int \frac{\log \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{2} \log^2 \tau + k$, ovvero $\int \frac{\log(3 - t)}{t - 3} dt = \frac{1}{2} \log^2(3 - t) + k$. A questo punto basta riunire i due integrali addendi e sottrarre i valori della primitiva così ottenuta negli estremi 2 e 1.

(1.i) Posto $t = \cos x$ si ha $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{2 + \cos^2 x} dx = -2 \int_1^0 \frac{t}{2 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{2t}{2 + t^2} dt = (\log(2 + t^2)) \Big|_0^1 = \log \frac{3}{2}$.



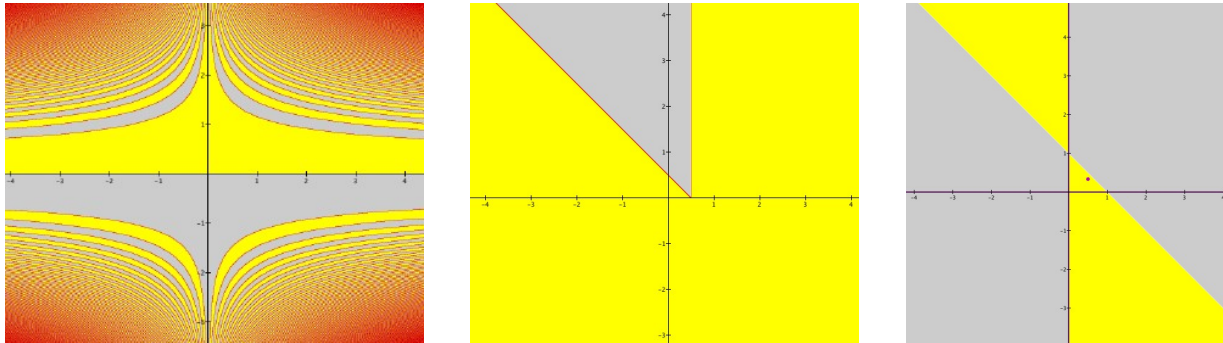
(1) Grafico di $f(x) = 2 \log |x| + \sqrt{x + 2}$ in (1.n); (2) L'insieme S_3 in (1.s); (3) L'ellisse $\gamma(t)$ in (2.b).

(1.n) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = 2 \log |x| + \sqrt{x + 2}$ è dato da $x \geq -2$ e $x \neq 0$; la funzione non ha periodo o parità, è continua nel suo dominio e derivabile ovunque tranne che in $x = -2$ (a causa della radice). Un facile confronto grafico tra le funzioni $2 \log |x|$ (il logaritmo a due falde simmetriche e raddoppiato di valore) e $-\sqrt{x + 2}$ (la radice quadrata arretrata di 2 e resa negativa) mostra che f si annulla in due punti x_0 e x_1 con $-1 < x_0 < 0 < x_1 < 1$, e vale $f(x) > 0$ per $-2 \leq x < x_0$ e $x > x_1$. I limiti notevoli sono determinati e valgono $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, mentre f è continua in -2 col valore $f(-2) = 2 \log 2 \sim 1,4$; non vi sono asintoti a $+\infty$. Derivando (con $x \neq -2$) si ottiene $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{4\sqrt{x+2} + x}{2x\sqrt{x+2}}$: vale $f'(x) = 0$ quando $4\sqrt{x+2} = -x$, che nell'ipotesi $-x > 0$ (cioè se $-2 \leq x < 0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2 = (-x)^2$, ovvero $x^2 - 16x - 32 = 0$, soddisfatta per $x = x_2 := -4(\sqrt{6} - 2) \sim -1,8$. Passiamo ora allo studio di $f'(x) > 0$. Il numeratore è positivo quando $4\sqrt{x+2} > -x$, che se $-x < 0$ (cioè se $x > 0$) è sempre vero, mentre se $-x > 0$ (cioè se $-2 < x < 0$) equivale a $(4\sqrt{x+2})^2 > (-x)^2$, ovvero $x^2 - 16x - 32 < 0$, soddisfatta per $x > x_2$: pertanto il numeratore è positivo per $x_2 < x < 0$ e per $x > 0$. D'altra parte il denominatore è positivo quando $x > 0$, dunque $f'(x) > 0$ per $-2 < x < x_2$ e per $x > 0$: ne ricaviamo che $x = x_2$ è un punto di massimo locale (con $f(x_2) \sim 1,6$). Si osservi anche che $\lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) = +\infty$. La derivata seconda $f''(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{4}(x + 2)^{-\frac{3}{2}}$ è sempre < 0 , dunque f è concava in tutto il dominio. Dallo studio appena effettuato ricaviamo che l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ ha senso quando sia a che b stanno in $[-2, 0[$, oppure quando sono entrambi > 0 , ed in tali casi vale $\int_a^b f(x) dx = (2x(\log |x| - 1) + \frac{2}{3}(x + 2)^{\frac{3}{2}}) \Big|_a^b$.

(1.s) (Figura 2) La condizione $\log(1 - xy) \leq 0$ richiede che $0 < 1 - xy \leq 1$, ovvero che $0 \leq xy < 1$: si tratta delle parti di I e III quadrante strettamente comprese tra le due falde dell'iperbole equilatera $xy = 1$. Invece, la condizione $|y - 2x| \leq 1$ equivale a $-1 \leq y - 2x \leq 1$, ovvero $2x - 1 \leq y \leq 2x + 1$: si tratta della fascia obliqua di piano compreso tra le due rette $y = 2x - 1$ e $y = 2x + 1$. L'insieme S_3 è ottenuto dall'intersezione di tali sottoinsiemi. Dal sistema tra $y = \frac{1}{x}$ e $y = 2x + 1$ si ottiene $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$, e da quello tra $y = \frac{1}{x}$ e $y = 2x - 1$ si ottiene $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 1$: per chiare ragioni di simmetria, l'area di S_3 risulta $2(\int_0^{\frac{1}{2}} (2x + 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - 1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^0 0 dx) = 2((x^2 + x)_0^{\frac{1}{2}} + (\log x)_{\frac{1}{2}}^1 + (x^2 - x)_{\frac{3}{2}}^1) = 2 \log 2 + 1 \sim 2,4$.

(2) Funzioni di due o più variabili reali.

(2.c) (Figura 4) Il dominio di $f(x, y) = x \operatorname{tg}(xy^3)$ è dato dalla condizione $xy^3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$): si tratta di escludere una famiglia di curve del tipo $xy^3 = \alpha$, che hanno due rami simili a quelli dell'iperbole equilatera $xy = 1$ nel primo e terzo quadrante se $\alpha > 0$, nel secondo e quarto quadrante se $\alpha < 0$, mentre se $\alpha = 0$ si ottiene l'unione dei due assi coordinati $x = 0$ e $y = 0$. Similmente, si ha $f(x, y) = 0$ per $x = 0$, $y = 0$ oppure per $xy^3 = k\pi$ (con $k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Si ha poi $f(x, y) > 0$ nei seguenti casi: se $x > 0$, per $k\pi < xy^3 < \frac{\pi}{2} + k\pi$; e se $x < 0$, per $\frac{\pi}{2} + k\pi < xy^3 < \pi + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Quando il punto (x, y) si avvicina ad una delle curve escluse dal dominio, $f(x, y)$ diverge a $\pm\infty$; dunque f non è limitata. La funzione è differenziabile su tutto il suo dominio; le derivate parziali sono $\frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg}(xy^3) + x \frac{y^3}{\cos^2(xy^3)}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)}$. Essendo $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, sia la funzione lineare tangente in $(0, 0)$ che il differenziale $df_{(0,0)}(x, y)$ sono 0; essendo invece $f(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{4}$, poi $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 1) = 1 + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, 1) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{8}$, si ha $df_{(\frac{\pi}{4}, 1)}(x, y) = (\frac{\pi}{2} + 1)x + \frac{3\pi}{8}y$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} + 1)(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3\pi}{8}(y - 1) = (\frac{\pi}{2} + 1)x + \frac{3\pi}{8}y - \frac{\pi}{2}$. Le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \frac{y^3}{\cos^2(xy^3)} + 2xy^6 \frac{\sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{2y^3(\cos(xy^3) + y^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3x^2 \frac{2y \cos^2(xy^3) + 2y^2 \cdot 3xy^2 \sin(xy^3) \cos(xy^3)}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6x^2 y (\cos(xy^3) + 3xy^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{3xy^2}{\cos^2(xy^3)} + x \frac{3y^2 \cos^2(xy^3) + y^3 \cdot 2 \sin(xy^3) \cos(xy^3) \cdot 3xy^2}{\cos^4(xy^3)} = \frac{6xy^2 (\cos(xy^3) + xy^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x \frac{3y^2}{\cos^2(xy^3)} + x^2 \cdot 3y^2 \frac{2y^3 \sin(xy^3)}{\cos^3(xy^3)} = \frac{6xy^2 (\cos(xy^3) + xy^3 \sin(xy^3))}{\cos^3(xy^3)}$: notare che $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, come prescrive Schwarz.



(4) Segno di $x \operatorname{tg}(xy^3)$ in (2.c); (5) Segno di $\operatorname{arctg}(|2x + y - 1| - y)$ in (2.d); (6) Segno di $x^3 y^2 (1 - x - y)$ in (2.i); in porpora i punti stazionari.

(2.d) (Figura 5) Il dominio di $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}(|2x + y - 1| - y)$ è tutto $\mathbb{R}^2$; vale $\ell(x, y) = 0$ quando $|2x + y - 1| = y$: nell'ipotesi che $y \geq 0$, ciò equivale a $2x + y - 1 = y$ (ovvero $x = \frac{1}{2}$) oppure $2x + y - 1 = -y$ (ovvero $y = -x + \frac{1}{2}$), pertanto ℓ si annulla sui tratti delle rette $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + \frac{1}{2}$ che stanno nel semipiano $y \geq 0$. Quanto al segno, vale $\ell(x, y) > 0$ quando $|2x + y - 1| > y$; ciò è sempre vero se $y < 0$, mentre se $y \geq 0$ equivale a $2x + y - 1 < -y$ (ovvero $y < -x + \frac{1}{2}$) oppure $2x + y - 1 > y$ (ovvero $x > \frac{1}{2}$): pertanto ℓ è positiva su tutto il piano $\mathbb{R}^2$ tranne il settore del semipiano $y > 0$ compreso tra le rette $x = \frac{1}{2}$ e $y = -x + \frac{1}{2}$. La funzione ℓ è certamente limitata, perché $|\ell(x, y)| < \frac{\pi}{2}$; da quanto detto sopra, si evince che il limite a ∞ non esiste. La funzione è certamente differenziabile in tutti i punti che non stanno sulla retta $2x + y - 1$ (a causa del modulo). Dove $2x + y - 1 > 0$ (ovvero sopra la retta $y = -2x + 1$) la funzione diventa $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}((2x + y - 1) - y) = \operatorname{arctg}(2x - 1)$, dunque costante rispetto a y , con derivate parziali $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{2}{1 + (2x - 1)^2} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$ e $\frac{\partial \ell}{\partial y} \equiv 0$. Il punto $A = (1, 1)$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(1, 1) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\partial \ell}{\partial x}(1, 1) = 1$, si ha $d\ell_{(1,1)}(x, y) = x$ e la funzione lineare tangente $\frac{\pi}{4} + (x - 1) = x - \frac{3}{4}$. Dove invece $2x + y - 1 < 0$ (ovvero sotto la retta $y = -2x + 1$) la funzione diventa $\ell(x, y) = \operatorname{arctg}(-(2x + y - 1) - y) = \operatorname{arctg}(1 - 2x - 2y)$, con derivate parziali $\frac{\partial \ell}{\partial x} = \frac{\partial \ell}{\partial y} = \frac{-2}{1 + (1 - 2x - 2y)^2} = -\frac{1}{2x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x - 2y + 1}$. Il punto $B = (-1, \frac{3}{2})$ sta in tale parte del dominio: essendo $\ell(-1, \frac{3}{2}) = \operatorname{arctg}(0) = 0$ e $\frac{\partial \ell}{\partial x}(-1, \frac{3}{2}) = \frac{\partial \ell}{\partial y}(-1, \frac{3}{2}) = -2$, si ha $d\ell_{(-1, \frac{3}{2})}(x, y) = -2x - 2y$ e la funzione lineare

tangente $0 - 2(x - (-1)) - 2(y - \frac{3}{2}) = -2x - 2y + 1$. Guardiamo ora i punti sulla retta "incriminata" $y = -2x + 1$, ovvero quelli della forma $(x_0, -2x_0 + 1)$: la derivata parziale $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ ha (ovviamente) limite 0 tendendo ad un tale punto da sopra la retta, ed ha limite $-\frac{1}{2(x_0)^2 + 2(-2x_0 + 1)^2 + 4x_0(-2x_0 + 1) - 2x_0 - 2(-2x_0 + 1) + 1} = -\frac{1}{2x_0^2 - 2x_0 + 1}$ tendendovi da sotto: si noti che tale ultimo limite non è mai nullo, dunque $\frac{\partial \ell}{\partial y}$ non esiste in nessuno dei punti della retta. Ciò dimostra senza dubbio che ℓ , pur essendo continua sui punti della retta, non è differenziabile in nessuno di essi (se lo fosse, dovrebbero anche esistere entrambe le derivate parziali). Le derivate seconde sopra la retta $y = -2x + 1$ sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2(2x-1)}{(2x^2-2x+1)^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv 0$; sotto la retta $y = -2x + 1$ sono invece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(2x+2y-1)}{(2x^2+2y^2+4xy-2x-2y+1)^2}$. In entrambi i casi il teorema di Schwarz è confermato.

(2.h) Poiché $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 6y^2 + 7$, integrando rispetto a x dovrà essere $f(x, y) = x^3y - 6xy^2 + 7x + \varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 12xy + 2y$, integrando rispetto a y si ottiene $x^3 - 12xy + \varphi'(y) = x^3 - 12xy + 2y$, da cui $\varphi'(y) = 2y$, da cui $\varphi(y) = y^2 + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $f(x, y) = x^3y - 6xy^2 + 7x + y^2 + k$; infine, da $f(0, 2) = -1$ si ricava $4 + k = -1$, dunque $k = -5$, e perciò $f(x, y) = x^3y - 6xy^2 + 7x + y^2 - 5$. In modo simile, poiché $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \cos xy - x^2y \sin xy - 3y^2 + 8$ dovrà essere $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x + \varphi(y)$ per una certa funzione $\varphi(y)$ da determinare; essendo poi $\frac{\partial g}{\partial y} = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$ si ottiene $-x^3 \sin xy - 6xy + \varphi'(y) = -x^3 \sin xy - 6xy - 2y$, da cui $\varphi'(y) = -2y$, da cui $\varphi(y) = -y^2 + k$ con $k \in \mathbb{R}$ costante da determinare, e dunque $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x - y^2 + k$; infine, da $g(-1, 0) = -3$ si ricava $1 - 8 + k = -3$, dunque $k = 5$, e perciò $g(x, y) = x^2 \cos xy - 3xy^2 + 8x - y^2 + 5$. Si noti che in generale, se vengono assegnate le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta(x, y)$, il teorema di Schwarz implica che deve essere $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}$ (condizioni di *chiusura*). Per maggiori dettagli, si veda la parte finale facoltativa delle note sulle funzioni di più variabili reali.

(2.i) (Figura 6) Gli eventuali punti di massimo e minimo locale in $\mathbb{R}^2$ di $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ si trovano tra i punti stazionari, dunque iniziamo col cercare questi ultimi. Dal sistema tra $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2(1 - x - y) - x^3y^2 = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y(1 - x - y) - x^3y^2 = 0$, ovvero tra $x^2y^2(3 - 4x - 3y) = 0$ e $x^3y(2 - 2x - 3y) = 0$, si trovano tutti i punti degli assi coordinati e il punto $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. La matrice hessiana è $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2(1 - 2x - y) & x^2y(6 - 8x - 9y) \\ x^2y(6 - 8x - 9y) & x^3(2 - 2x - 6y) \end{pmatrix}$,

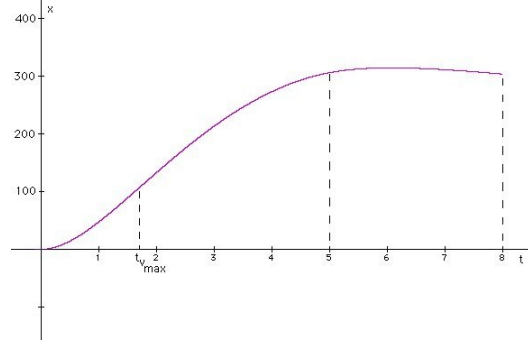
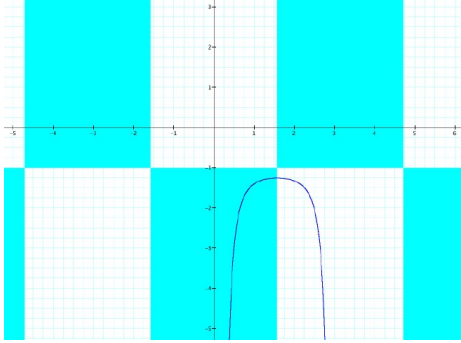
dunque $H_f(P) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{12} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$ ci dice che P è un punto di massimo locale stretto (con $f(P) = \frac{1}{432}$). D'altra parte, nei punti degli assi coordinati l'hessiano ha determinante nullo, dunque il criterio non dà informazioni precise; tuttavia, poiché sugli assi f è nulla, l'esame del segno di f (riportato in figura) ci dice subito che i punti $(x_0, 0)$ dell'asse x sono di massimo locale non stretto se $x_0 < 0$ oppure $x_0 > 1$ e di minimo locale non stretto se $0 < x_0 < 1$, mentre i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$ e tutti i punti dell'asse y sono delle selle.

L'insieme $A = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ è il rombo pieno (lati compresi) di vertici $Q_1(1, 0)$, $Q_2(0, 1)$, $Q_3(-1, 0)$ e $Q_4(0, -1)$, mentre $B = \{(t, -2) : |t| \leq 2\}$ è il tratto di segmento orizzontale tra i punti $R_1(-2, -2)$ e $R_2(2, -2)$: essendo entrambi gli insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^2$, f ammetterà estremi assoluti su ciascuno di essi per Weierstrass. Iniziamo da A , i punti interni candidati ad essere estremanti per f sono quelli per cui $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, e sono dunque i già noti P (in cui $f(P) = \frac{1}{432}$) e quelli sugli assi (nei quali $f = 0$). Nei quattro vertici si ha pure $f(Q_1) = f(Q_2) = f(Q_3) = f(Q_4) = 0$. Sul lato Q_1Q_2 si ha $\phi_1(t) = f(t, 1 - t) \equiv 0$; sul lato Q_2Q_3 si ha $\phi_2(t) = f(t, t + 1) = -2t^4(t + 1)^2$ con $-1 < t < 0$, e ponendo $\phi_2'(t) = -4t^3(t + 1)(3t + 2) = 0$ si ottiene $t = -\frac{2}{3}$, ovvero il punto $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ in cui f vale $-\frac{32}{729}$; sul lato Q_3Q_4 si ha $\phi_3(t) = f(t, -1 - t) = 2t^3(t + 1)^2$ con $-1 < t < 0$, e ponendo $\phi_3'(t) = 2t^2(t + 1)(5t + 3) = 0$ si ottiene $t = -\frac{3}{5}$, ovvero il punto $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ in cui f vale $-\frac{216}{3125}$; infine, sul lato Q_4Q_1 si ha $\phi_4(t) = f(t, t - 1) = -2t^3(t - 1)^3$ con $0 < t < 1$, e ponendo $\phi_4'(t) = -6t^2(t - 1)^2(2t - 1) = 0$ si ottiene $t = \frac{1}{2}$, ovvero il punto $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in cui f vale $\frac{1}{32}$. Pertanto, essendo $-\frac{216}{3125} < -\frac{32}{729} < 0 < \frac{1}{432} < \frac{1}{32}$, il minimo assoluto di f su A è $-\frac{216}{3125}$ (assunto in $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$) e il massimo assoluto è $\frac{1}{32}$ (assunto in $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$). Passiamo ora a B . Negli estremi si ha $f(R_1) = -160$ e $f(R_2) = 32$, mentre negli altri punti si ha $\phi(t) = f(t, -2) = 4t^3(3 - t)$ con $-2 < t < 2$: ponendo $\phi'(t) = 4t^2(9 - 4t) = 0$ si ottiene solo $t = 0$ (invece $t = \frac{9}{4}$ non interessa perché > 2), ovvero il punto $(0, -2)$ in cui f vale 0. Pertanto il minimo assoluto di f su B è -160 (assunto in R_1) e il massimo assoluto è 32 (assunto in R_2).

(3) Equazioni differenziali.

(3.c) (Figura 7) Per discutere la crescenza delle soluzioni bisogna ricavare esplicitamente y' , ma ciò richiede di dividere per $y^2 \sin^2 x$: iniziamo dunque discutendo brevemente cosa accade quando tale divisione non è possibile. Dalla forma dell'equazione si deduce che se $y(x)$ è una soluzione e $y(x) = 0$, si ottiene $\cos x = 0$: ovvero, se una soluzione si annulla in un punto x allora tale punto dev'essere necessariamente della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; viceversa, nei punti x della forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ si ha $\pm y^2(x)y'(x) = 0$, dunque o $y(x) = 0$ (come appena detto) o $y'(x) = 0$, ovvero si ha un punto stazionario, probabile estremante locale. Sempre dalla forma dell'equazione si deduce anche che se una soluzione è definita in qualche punto x del tipo $k\pi$, dev'essere $y^3(x) + 1 = 0$, ovvero in tale punto la soluzione deve valere -1 . Escludendo ora i punti del piano in cui $y = 0$ oppure $x = k\pi$, otteniamo

finalmente $y' = -\frac{(y^3+1)\cos x}{y^2 \sin^2 x}$: pertanto $y'(x) = 0$ o se $y(x) = -1$ o se $\cos x = 0$ (ovvero per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$), mentre $y'(x) > 0$ se $(y^3 + 1)\cos x < 0$, ovvero se $y > -1$ e $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ oppure se $y < -1$ e $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Se la condizione iniziale è $y(-3) = -1$, la soluzione è la funzione costante $y(x) \equiv -1$; occupiamoci invece del caso in cui la condizione iniziale sia $y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt[3]{2}$. Separando le variabili, si ottiene $\frac{y^2}{y^3+1}y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, da cui integrando si ha $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} + k$; imponendo la condizione iniziale si ha $0 = 1 + k$, da cui $k = -1$ e perciò $\frac{1}{3}\log|y^3+1| = \frac{1}{\sin x} - 1$. Si ha dunque $|y^3+1| = e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, ovvero $y^3+1 = \pm e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$: ma la condizione iniziale impone $-1 = \pm 1$, e dunque va scelto il segno “-”, da cui $y^3 = -1 - e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}$, da cui $y = -\sqrt[3]{1 + e^{3(\frac{1}{\sin x}-1)}}$.



(7) Zone di crescita e grafico della soluzione di (3.c); (8) Il grafico della legge oraria del moto di (3.1).

(3.f) Per risolvere l'equazione è necessario per il momento escludere i punti in cui $\sin x = 0$, ovvero i punti del tipo $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tale caso, l'equazione diventa $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = \cotg x$ e $q(x) = 2\cos x$. Come noto, una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \log|\sin x|$; bisogna poi calcolare $\int e^{P(x)}q(x)dx$, ovvero $\int |\sin x| \cdot 2\cos x dx = (\text{sign}(\sin x)) \int 2\sin x \cos x dx = -(\text{sign}(\sin x)) \cos^2 x$. Si ha dunque l'integrale generale $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)dx + k) = \frac{1}{|\sin x|}(-(\text{sign}(\sin x))\cos^2 x + k) = \frac{k}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

Imponendo la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = y_0$ si ottiene $k = y_0$ e dunque $y(x) = \frac{y_0}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{y_0 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $]0, \pi[$; imponendo invece la condizione iniziale $y(-\frac{\pi}{2}) = y_1$ si ottiene $k = y_1$ e dunque $y(x) = \frac{y_1}{|\sin x|} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-y_1 - \cos^2 x}{\sin x}$, definita in $] -\pi, 0[$. L'unico caso in cui si può sperare di prolungare in $x = 0$, incollandole, le due soluzioni appena trovate è quando $y_0 = 1$ e $y_1 = -1$ (se queste due condizioni non sono soddisfatte contemporaneamente, entrambe oppure una delle due soluzioni divergono quando x tende a 0). In tal caso si ottiene la funzione $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \sin x$ sia a sinistra che a destra, e tale funzione può essere ovviamente prolungata come funzione derivabile (anzi, addirittura come funzione C^∞) in $x = 0$ col valore $\sin 0 = 0$. (D'altra parte, con un po' di occhio, si poteva riconoscere fin da subito che $y(x) = \sin x$ è una soluzione dell'equazione differenziale data.)

(3.h) L'equazione caratteristica è $4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, che ha soluzione doppia $\lambda = \frac{1}{2}$: dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea associata $4y'' - 4y' + y = 0$ è data da $y(x) = (A + Bx)e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione completa $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$: in questo caso, il metodo dei coefficienti indeterminati ci dice che si potrà trovare del tipo $\tilde{y}(x) = x^2 e^{\frac{x}{2}}(mx + q) = (mx^3 + qx^2)e^{\frac{x}{2}}$. Derivando, si ottiene $\tilde{y}'(x) = (\frac{m}{2}x^3 + (\frac{q}{2} + 3m)x^2 + 2qx)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x) = (\frac{m}{4}x^3 + (\frac{q}{4} + 3m)x^2 + (2q + 6m)x + 2q)e^{\frac{x}{2}}$, ed imponendo che sia soluzione si trova allora $4\tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + \tilde{y} = (24mx + 8q)e^{\frac{x}{2}} = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$, da cui $m = \frac{1}{24}$ e $q = \frac{1}{8}$ e dunque $\tilde{y}(x) = \frac{x^3 + 3x^2}{24}e^{\frac{x}{2}}$. L'integrale generale dell'equazione completa è dunque $y(x) = (A + Bx + \frac{x^3 + 3x^2}{24})e^{\frac{x}{2}}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da cui $y'(x) = (\frac{1}{2}A + B + (\frac{1}{2}B + \frac{1}{4})x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$. Imponendo le condizioni iniziali, si trova $y(0) = A = -2$ e $y'(0) = \frac{1}{2}A + B = 0$, da cui $B = 1$, e dunque finalmente la soluzione $y(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 24x - 48}{24}e^{\frac{x}{2}}$.

(3.1) (Figura 8) In base a quanto detto, l'intensità della forza propulsiva è data dalla funzione continua $F : [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $F(t) = 150(1 - \frac{1}{5}t) = 150 - 30t$ (per $0 \leq t \leq 5$) e $F(t) \equiv 0$ (per $5 \leq t \leq 8$). Fissiamo ora un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto con il valore $x = 0$ sul suolo. Dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante $t = 5$ il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x' + (150 - 30t)$, ovvero $x'' + x' = 140 - 30t$, con condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (il candelotto parte da terra con velocità nulla). Una prima integrazione dà $x' + x = 140t - 15t^2 + k$ con k da determinare; ma le condizioni iniziali danno necessariamente $k = 0$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = 140t - 15t^2$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 140t - 15t^2$, una primitiva di $p(t)$ è $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)}q(t)dt = \int (140t - 15t^2)e^t dt = (140t - 15t^2)e^t - \int (140 - 30t)e^t dt = (140t - 15t^2)e^t - (140 - 30t)e^t + \int (-30)e^t dt = (170t - 15t^2 - 170)e^t$.

L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((170t - 15t^2 - 170)e^t + h) = 170t - 15t^2 - 170 + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(0) = 0$ si ricava $-170 + h = 0$, ovvero $h = 170$, da cui la soluzione $x(t) = 170(t - 1 + e^{-t}) - 15t^2$. Ribadiamo che questa legge vale solo fino a $t = 5$, in cui l'altezza raggiunta vale $x(5) \sim 306$ m, e la velocità è $x'(5) = [170(1 - e^{-t}) - 30t]_{t=5} \sim 19$ m/sec (corrispondenti a circa 68 km/h).

Dall'istante iniziale $t = 5$ all'istante $t = 8$ la forza propulsiva sparisce, ed il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x'$, ovvero $x'' + x' = -10$, con le nuove condizioni iniziali $x(5) = 306$ m e $x'(5) = 19$ m/sec ereditate dal moto precedente. Procedendo ancora come prima, una prima integrazione dà $x' + x = -10t + k$ con k da determinare, e le condizioni iniziali danno $19 + 306 = -50 + k$, da cui $k = 375$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = -10t + 375$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 375 - 10t$, una primitiva di $p(t)$ è ancora $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)} q(t) dt = \int (375 - 10t)e^t dt = (375 - 10t)e^t - \int (-10)e^t dt = (385 - 10t)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((385 - 10t)e^t + h) = 385 - 10t + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(5) = 306$ si ricava $385 - 50 + he^{-5} = 306$, ovvero $h = -29e^5 \sim -4304$, da cui la soluzione $x(t) = 385 - 10t - 4304e^{-t}$, che vale per $5 \leq t \leq 8$. L'altezza finale raggiunta all'istante dello scoppio, ovvero all'istante dell'inizio dello spettacolo dei fuochi d'artificio, è dunque $x(8) \sim 303$ m. (Terminiamo, per curiosità, con alcune osservazioni. La velocità massima toccata dal candelotto si ha quando $(x'(t))' = x''(t) = 170e^{-t} - 30 = 0$, ovvero dopo $\tilde{t} = \log \frac{17}{3} \sim 1,73$ secondi dalla partenza, quando diventa $x'(\tilde{t}) \sim 88$ m/sec, ovvero circa 317 km/h. L'altezza massima raggiunta durante l'ascesa si ha quando $x'(t) = -10 + 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo $\hat{t} = \log \frac{2152}{5} \sim 6,06$ secondi dalla partenza, alla quota $x(\hat{t}) \sim 314$ m; infatti, all'istante dello scoppio il candelotto sta già scendendo, con velocità $x'(\hat{t}) \sim -8,55$ m/sec, circa -31 km/h. È pure curioso notare che, in base al modello adottato in questo problema, se il candelotto non fosse esploso la velocità di discesa si sarebbe stabilizzata velocemente sui -10 m/sec, circa -36 km/h, raggiungendo nuovamente il suolo quando $385 - 10t - 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo circa $t_1 \sim 38,5$ secondi.)