EX3

Calcolare, se $\exists$, $\int_0^1 (2x+1)\ln(x+1)\,dx$.

Ris

$f(x) = (2x+1)\ln(x+1)$ è definita e continua in $(-1,+\infty)$ perché prodotto di composte di funzioni continue

in particolare f è continua in $[0,1] \Rightarrow \exists \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx \underset{\text{per parti}}{=} \ln(x+1)\cdot(x^2+x) - \int (x^2+x)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$\left[\int f'g = fg - \int fg' \quad \text{con} \quad f' = 2x+1 \quad g = \ln(x+1), \quad f = x^2+x \quad g' = \frac{1}{x+1}\right]$$

$$= (x^2+x)\ln(x+1) - \int \frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}\,dx = (x^2+x)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[(x^2+x)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2\right]\Big|_0^1 = \left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\right) - 0 = 2\ln 2 - \frac{1}{2}$$

Condizioni sufficienti di integrabilità secondo Riemann

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1) se f è monotona in $[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

2) se f è continua in $[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

3) se f è limitata in $[a,b]$ e f è continua in $[a,b]\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ con $x_1,\dots x_n \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx$

EX3 fila D