Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

# Esercizi per il Corso di ALGEBRA

**Foglio 10**
16 dicembre 2014

1. Sia $F$ il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^4 - 9$ su $\mathbb{Q}$
   (a) si verifichi che $\mathbb{Q} \subset F$ è una estensione di Galois e si trovi una $\mathbb{Q}$-base di $F$.
   (b) Si determinino tutti gli elementi del gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ e si verifichi che $G$ è isomorfo al gruppo di Klein.
   (c) Si determino tutti i sottogruppi di $G$ e tutti i campi intermedi $\mathbb{Q} \subset L \subset F$
   (d) Si dimostri che $\mathbb{Q} \subset L$ è una estensione di Galois per ogni campo intermedio $\mathbb{Q} \subset L \subset F$.

   (*8 punti*)

2. Siano $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ e $\alpha = \sqrt[4]{2}$.
   (a) Si mostri che $K \subset F$ è un'estensione di Galois
   (b) Si determinino tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(F/K)$. In particolare, si dimostri che esistono $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(F/K)$ tali che $\sigma(i) = i$, $\sigma(\alpha) = i\alpha$, e $\tau(\alpha) = \alpha$, $\tau(i) = -i$.
   (c) Si verifichi che $\mathrm{Gal}(F/K)$ è isomorfo a $D_4$.
   (d) Si trovino i campi intermedi di $K \subset F$ (Sugg: si trovino i campi fissi dei sottogruppi di $\mathrm{Gal}(F/K)$).

   (*8 punti*)

3. Si decida se i seguenti enunciati su un'estensione di Galois $K \subset F$ sono veri o falsi (motivando la risposta):
   (a) $[F : K] = p$ per un numero primo $p$ se e solo se $\mathrm{Gal}(F/K)$ è un gruppo ciclico.
   (b) Se $[F : K] = 4$ e $K \subset L \subset F$ è un campo intermedio, allora $K \subset L$ è un'estensione di Galois.

   (*4 punti*)

4. Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducile di grado 3 con un unico zero reale. Sia $G = \mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$. Si dimostri che $G \cong S_3$.

   (*4 punti*)

5. Sia $F_1$ il campo di riducibilità completa di $x^4 - 4$ su $\mathbb{Q}$ e sia $F_2$ il campo di riducibilità completa di $x^4 + 16$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Si trovino $\mathrm{Gal}(F_1/\mathbb{Q})$ e $\mathrm{Gal}(F_2/\mathbb{Q})$.
   (b) $F_1$ e $F_2$ sono campi isomorfi?

   (*6 punti*)

**Consegna: mercoledì 8 gennaio durante la lezione.**