

ESERCIZIO 1

(a) Il numero di condizionamento è per $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 K(x) &= \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1} - 1} \right| \stackrel{\text{razionalizzo}}{=} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{[(x+1) - 1] 2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{2\sqrt{x+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)
 \end{aligned}$$

Allora è $K(x) < 2$ per ogni $x \in (0, 1]$ ed il problema della valutazione è ben condizionato.

Per $x = 0$ l'espressione di $K(x)$ perde di significato, poiché $K(x) \rightarrow 2$ per $x \rightarrow 0$, si può assumere $K(0) = 2$.

(b) Gli elementi di $IF(10, 2, -2, 2)$ sono della forma

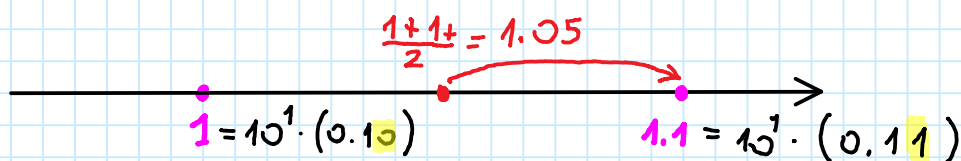
$$x = \{0\} \cup \{ \pm 10^e \cdot 0.c_1c_2 \}$$

con $e \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $c_1, c_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $c_1 \geq 1$.

Allora è

$$\text{cond}(IF) = 1 + 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10 = 901$$

La precisione di macchina è il più piccolo numero da sommare a $1 \in IF$ per ottenere il successivo numero di macchina. Usando la tecnica di arrotondamento abbiamo



Allora $\bar{e}$

$$1 \oplus x = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0.05 \\ 1.1 & \text{se } 0.05 \leq x < 0.1 \end{cases}$$

Pertanto, la precisione di macchina è $\boxed{\mu = 0.05}$.

(c) Valutiamo $p(0.10)$ in IF. Intanto, in $\mathbb{R}$ è

$$y = p(0.10) = \sqrt{0.10 + 1} - 1 = 1.048808848 - 1 = 0.048808848$$

In IF risulta

$$(a) \quad 0.10 \oplus 1 = fl(0.10 + 1) = fl(1.1) = 1.1$$

$\in \mathbb{F}$

$$(b) \quad \sqrt{1.1} = fl(\sqrt{1.1}) = fl(1.048808848) = 1.0$$

operazione in $\mathbb{F}$ operazione in $\mathbb{R}$ < 5

$$(c) \quad 1.0 \ominus 1 = fl(1 - 1) = fl(0) = 0 = \hat{y}$$

allora l'errore è

$$\left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right| = \left| \frac{y - 0}{y} \right| = 1 = 100\%$$

Quindi, la formula è instabile.

(d) Possiamo renderla stabile mediante razionalizzazione

$$p(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}$$

Ripetendo i passaggi in IF abbiamo

$$(a) \quad \sqrt{x \oplus 1} \oplus 1 = 2.0$$

$$(b) \quad 0.1 \oslash 2.0 = 0.05 = \hat{y}$$

con un errore

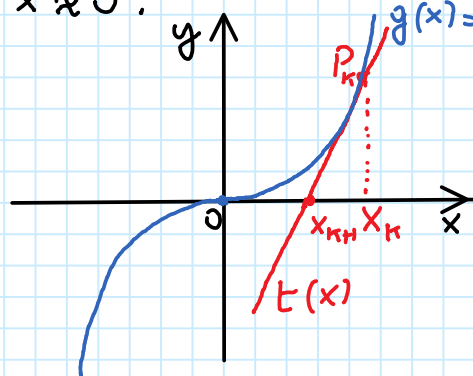
$$\left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right| = \left| \frac{0.048808848 - 0.05}{0.048808848} \right| = 2.5\%$$

ESERCIZIO 2

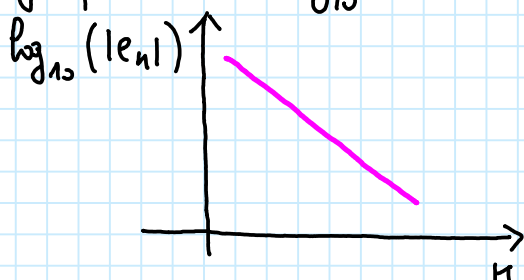
Dallo sviluppo di Taylor di f per $x \approx \xi = 0$

$$f(x) = x^2 \ln(1+x) = x^2(x + o(x)) = x^3 + o(x^3)$$

otteniamo che il grafico di f è approssimabile con quello di $g(x) = x^3$ per $x \approx 0$:



Quindi, la molteplicità di ξ è $\alpha = 3$. Inoltre, dal grafico vedo che la successione x_n generata da Newton converge a ξ in modo monotono decrescente dato che parto da $x_0 = 2 > \xi$. L'ordine di convergenza è $p = 1$ perché la radice è multiple con costante asintotica dell'errore $M = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Il grafico di $\log_{10}(|e_n|)$ è quindi lineare, almeno per n grandi:



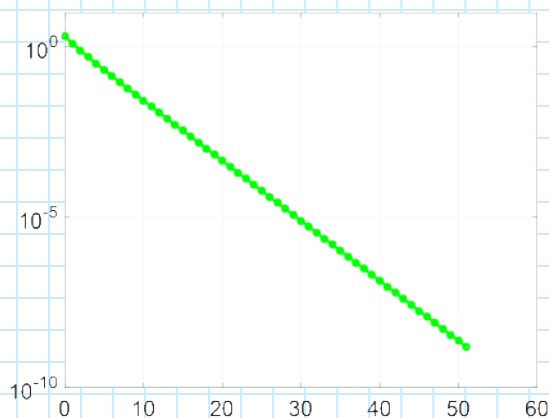
Dalla relazione, valida per la convergenza lineare,

$$|e_n| \approx M^n |e_0|$$

otteniamo una stima di n necessaria per avere $\frac{|e_n|}{|e_0|} < 10^{-9}$:
basta imporre

$$M^n < 10^{-9} \Leftrightarrow n > \frac{\log_{10}(10^{-9})}{\log_{10}(M)} = \frac{-9}{\log_{10}(\frac{2}{3})} = 51,11$$

Servono circa 52 iterazioni.



Le conferme tramite Matlab che
sono richieste circa 50 iterazioni
e che l'andamento di $\log_{10}(|e_n|)$ è
lineare.

Scrivendo l'iterazione

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 p_n(1+x_n)}{2x_n p_n(1+x_n) + \frac{x_n^2}{1+x_n}}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

si ottiene

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 1.2327835$$

$$x_2 = 0.7740510$$

$$x_3 = 0.4939105$$

da cui si ottiene la stima della costante asintotica

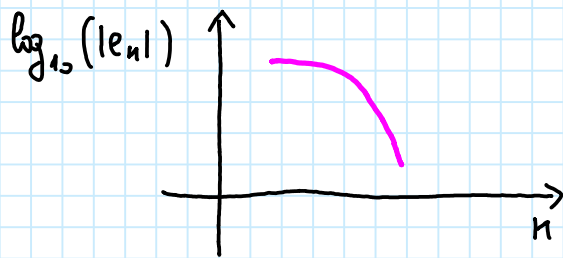
$$M \approx \frac{|x_3 - x_2|}{|x_2 - x_1|} = 0.611$$

in buon accordo al valore teorico.

Un metodo di ordine superiore è Newton modificato:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 p_n(1+x_n)}{2x_n p_n(1+x_n) + \frac{x_n^2}{1+x_n}}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

che ha ordine 2. Ne segue

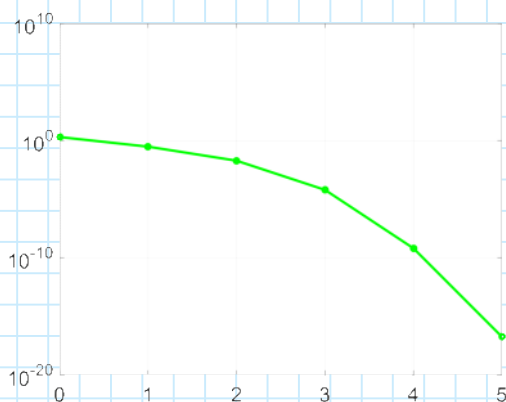


e, dato che $\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \approx M$, abbiamo

$$\begin{aligned} (*) \quad M &\approx \frac{|e_2|}{|e_1|^2} = \frac{|x_2 - \alpha|}{|x_1 - \alpha|^2} = \frac{|x_2|}{x_1^2} = \\ &= \frac{|-1.9125 \cdot 10^{-2}|}{(-3.0165 \cdot 10^{-1})^2} = 0.21 \end{aligned}$$

$$(*) \quad |e_3| \approx M|e_2|^2 = M|x_2|^2 \approx 7.7 \cdot 10^{-5}$$

Usando il Matlab otteniamo



ans =

```
2.0000000000000000
-0.301649458865421
-0.019124746724628
-0.000061747863747
-0.000000000635493
-0.000000000000000
```

```
x0 = e0
x1 = e1
x2 = e2
x3 = e3
```

ESERCIZIO 3

Abbiamo i punti:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	4	3	1	0.5

La tabella delle differenze divise è

-1	4			
0	3	-1		
1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$

Il polinomio di Newton è quindi:

$$\begin{aligned} P(x) &= 4 - 1(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)x + \frac{5}{12}(x+1)x(x-1) = \\ &= \frac{5}{12}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{12}x + 3 \end{aligned}$$

Verifico che soddisfa le condizioni di interpolazione:

$$P(-1) = 4 - 1(-1+1) - \frac{1}{2}(-1+1) \cdot (-1) + \frac{5}{12}(-1+1) \cdot (-1) \cdot (-1-1) = 4$$

$$P(0) = 4 - 1(0+1) - \frac{1}{2}(0+1) \cdot 0 + \frac{5}{12}(0+1) \cdot 0 \cdot (0-1) = 4 - 1 = 3$$

$$P(1) = 4 - 1(1+1) - \frac{1}{2}(1+1) \cdot 1 + \frac{5}{12}(1+1) \cdot 1 \cdot (1-1) =$$

$$= 4 - 2 - 1 = 1$$

$$P(2) = 4 - 1(2+1) - \frac{1}{2}(2+1) \cdot 2 + \frac{5}{12}(2+1) \cdot 2 \cdot (2-1) =$$

$$= 4 - 3 - 3 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

È poi

$$p(0.5) = p\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\approx P\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}+1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}-1\right)$$

$$= 4 - \frac{3}{2} - \frac{3}{8} - \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{8} = \frac{63}{32} \approx 1.97$$

Usando il Matlab

```
>> format rat
>> c=polyfit([-1 0 1 2],[4 3 1 0.5],3)

c =

    5/12    -1/2   -23/12     3

>> polyval(c,1/2)

ans =

    63/32

>>
```

Troviamo il modello $f(x) = k e^{\alpha x}$ che meglio approssime i dati (x_i, y_i) con $y_i = f(x_i)$. Abbiamo

$$h(f(x_i)) = h(k) + \alpha x_i \quad \sigma$$

$$h(y_i) = a_0 + a_1 x_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

La tabella dati diventa

x_i	-1	0	1	2	$\rightarrow 4 \text{ dati} \Rightarrow m+1=4$
$h(y_i)$	$h(4)$	$h(3)$	$h(1)$	$h(0.5)$	
	$2h(2)$	$h(3)$	0	$-h(2)$	

da cui segue

$$\begin{pmatrix} m+1 & \sum_{i=0}^3 x_i \\ \sum_{i=0}^3 x_i & \sum_{i=0}^3 x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^3 y_i \\ \sum_{i=0}^3 x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(2) + h(3) \\ -4h(2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = h(6) \\ 2a_0 + 6a_1 = -4h(2) \end{cases} \Rightarrow a_0 = -2h(2) - 3a_1$$

Sostituendo nella prima equazione ottengo

$$-4(h(4) + 3a_1) + 2a_1 = h(6)$$

$$-10a_1 = h(6) + 4h(4)$$

$$a_1 = -\frac{1}{10} h(4^4 \cdot 6)$$

$$a_0 = -2h(2) + \frac{3}{10} h(4^4 \cdot 6) = \frac{-20h(2) + 3 \cdot [9h(2) + h(3)]}{10}$$

$$= \frac{3h(3) + 7h(2)}{10} = \frac{1}{10} h(3^3 \cdot 2^7) = h((3^3 \cdot 2^7)^{1/10})$$

Dunque è

$$\alpha = a_1 = -\frac{1}{10} h(4^4 \cdot 6)$$

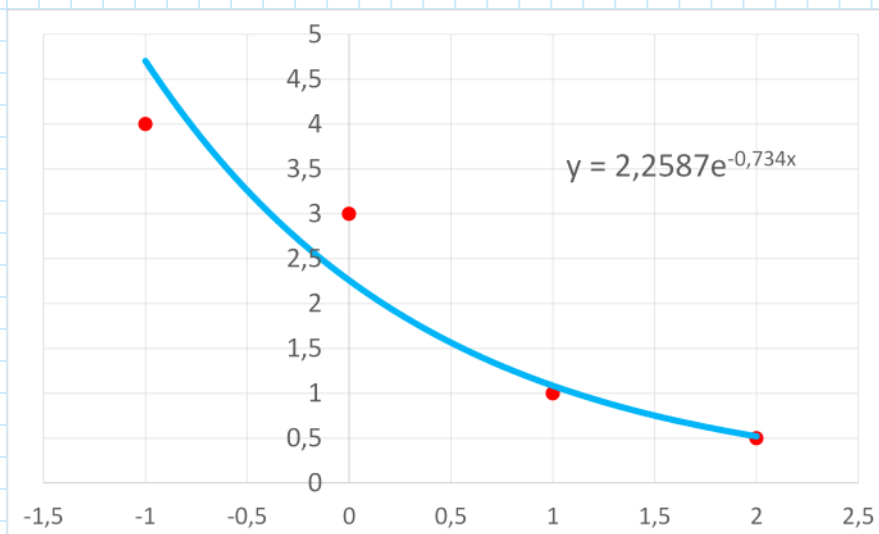
$$h(k) = a_0 \Rightarrow k = e^{a_0} = \sqrt[10]{3^3 \cdot 2^7}$$

Pertanto risulta

$$f(x) = k e^{2x} = \sqrt[10]{3^3 \cdot 2^7} \cdot e^{-\frac{1}{10} \ln(4^4 \cdot 6)} e$$

$$= 2,2587 \cdot e^{-0,7337x}$$

Ecco, a conferma, il risultato ottenuto con Excel



ESERCIZIO 4

Consideriamo l'integrale

$$I = \int_0^1 (x^4 + x) dx$$

(a) È

$$I = \int_0^1 (x^4 + x) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{0^5}{5} + \frac{0^2}{2} \right) = \frac{7}{10} = 0,7$$

(b) È

$$f(x) = x^4 + x \quad \text{per cui risulta}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 1$$

$$f''(x) = 12x$$

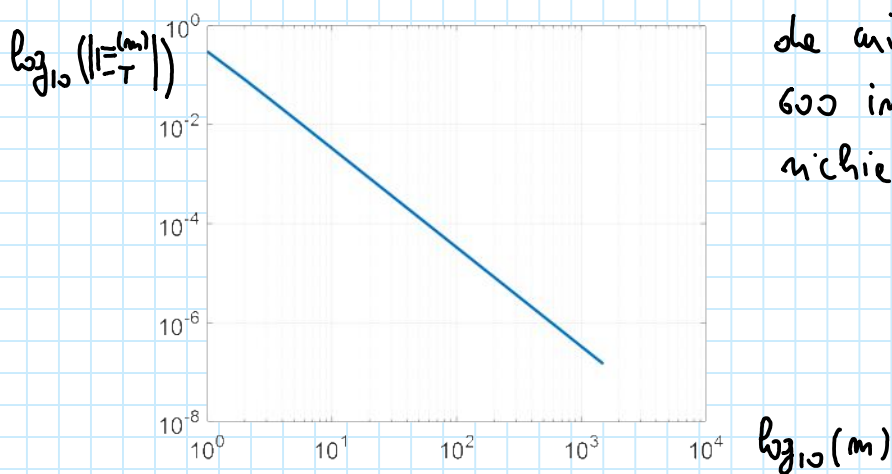
e quindi $M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = \max_{x \in [0,1]} |12x| = 12$

Pertanto non deve soddisfare la condizione

$$\frac{(b-a)^3}{12 m^2} M_2 \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{(1-0)^3}{12 m^2} \cdot 12 \leq 10^{-6} \Leftrightarrow$$

$$m \geq \sqrt{10^6} = 1000$$

Quindi servono 1000 intervalli per essere certi di calcolare l'integrale con un errore inferiore a 10^{-6} . Dato che per $|f''(x)|$ è stato preso il valore massimo, il numero di intervalli effettivamente necessari per avere un errore inferiore a 10^{-6} potrebbe essere inferiore a 1000. Usando il Matlab otteniamo, in effetti, le figure seguenti



da cui si vede che servono circa 600 intervalli per avere l'errore richiesto.

(c) Risulta per $m=1$ $x_0 = a = 0$, $x_1 = b = 1$, $h = b - a = 1$

$$I_T^{(1)} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{1-0}{2} [0^4 + 0 + 1^4 + 1] = 1.$$

$$E_T^{(1)} = I - I_T^{(1)} = \frac{7}{10} - 1 = -\frac{3}{10}$$

Sia ora $m=2$. $\hat{=}$ $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $h = x_1 - x_0 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} I_T^2 &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] = \\ &= \frac{1/2}{2} \left[(0^4 + 0) + 2 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^4 + \frac{1}{2} \right) + 1^4 + 1 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{8} + 1 + 2 \right] = \frac{25}{32} \approx 0.7813 \end{aligned}$$

$$E_T^{(2)} = I - I_T^{(2)} = \frac{7}{10} - \frac{25}{32} = -\frac{13}{160}$$

Puoi e

$$\frac{|E_T^{(2)}|}{|E_T^{(1)}|} = \frac{13 \cdot 10}{160 \cdot 3} = \frac{13}{48} \approx 0.27$$

Questo valore è prossimo a quello teorico di $1/4 = 0.25$.

(d) Da $I_T^{(1)}$ e $I_T^{(2)}$ possiamo ottenere la stima

$$\hat{I} = \frac{4 I_T^{(2)} - I_T^{(1)}}{3} = \frac{4 \cdot \frac{25}{32} - 1}{3} = \frac{17}{24} \approx 0.7083$$

La stima $\hat{I}$ è migliore delle precedenti perché $f^{(2)}(x)$ non varia troppo in $[0,1]$ e, inoltre, $\hat{I} = I_{cs}^{(1)}$.