

Esercizi e problemi (parte 2)

Problema 1 Come riportato nel testo, se $\mathbf{r} = \mathbf{F}(t)$, $a \leq t \leq b$, è una curva parametrica γ nello spazio 3D, con normale unitaria $\mathbf{N}(t)$ e binormale unitaria $\mathbf{B}(t)$, allora la superficie parametrica

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}(t) + s \cos v \mathbf{N}(t) + s \sin v \mathbf{B}(t), \quad a \leq t \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

è una superficie a forma di tubo con sezione di raggio s e di asse la curva γ .

Esempio: superficie toroidale. Se γ è il cerchio di raggio 3 di equazione parametrica

$$\mathbf{r} = (3 \cos t, 3 \sin t, 0),$$

poiché

$$\mathbf{N}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

e

$$\mathbf{B}(t) = (0, 0, 1),$$

la superficie

$$\mathbf{S} = (3 \cos t - \cos t \cdot \cos v, 3 \sin t - \sin t \cdot \cos v, \sin v), \quad a \leq t \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

è la superficie del toro con sezione di raggio 1, (vedi figura 1). La superficie può essere

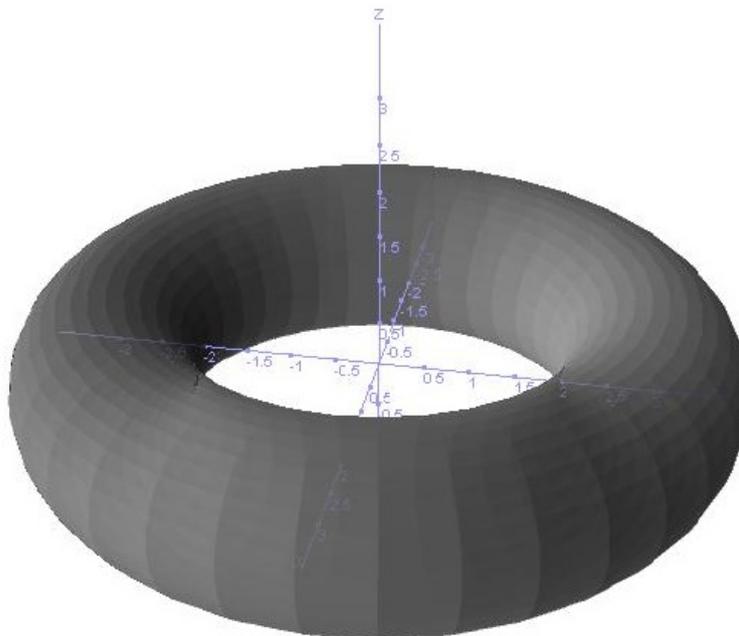


Figura 1: Superficie toroidale.

rappresentata in Wiris¹, con il comando:

`tracciare3D({3 cos t - cos t · cos v, 3 sin t - sin t · cos v, sin v}, t, 0..2π, v, 0..2π).`

In modo analogo si procede per altre superfici della stessa complessità di calcolo.

Esercizio 1 *Si modifichi il problema precedente in modo che il raggio della sezione vari in modo lineare con t .*

Esercizio 2 *Si trovi l'equazione parametrica dell'ellisse di equazione cartesiana*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Si calcoli la curvatura dell'ellisse in funzione del parametro.

Quanto vale il raggio di curvatura minimo, e in quale parte dell'ellisse si trova? e il massimo?

Esercizio 3 *Un'elica circolare parte dal punto $A = (2, 0, 0)$, ed ha curvatura (costante) $\kappa = 2/5$ e torsione (costante) $\tau = 1/5$.*

Sono sufficienti queste informazioni per determinare l'equazione dell'elica? e la forma? Si determini un'equazione parametrica dell'elica, e la lunghezza di una spira completa.

Esercizio 4 *Risolvere le seguenti equazioni differenziali:*

a. $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$,

b. $y' + 2xy = e^{-x^2}$,

c. $x^2y' - 3xy - 2y^2 = 0$ (ED omogenea),

d. $y'' - 2y' + 17y = 17x^2 + 13x + 17$.

Esercizio 5 *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

a. $y'' - 2y' + 17y = 17x^2 + 13x + 17$, con $y(0) = 2$ e $y'(0) = 6$,

b. $y' = -y/(x+2) + \ln(x)$, con $y(1) = 1$.

Altri esercizi si trovano nei temi d'esame dello scorso anno.

¹url: wiris.indire.it/wiris/it/