Analisi Matematica I

(1) Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione del dominio A.

a) Definire il concetto di punto di accumulazione e, nel caso $x_0 \in A$, definire la continuità in x_0.

b) Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x+3)}$ usando la regola di ~~de~~ l'Hospital dopo averne verificate le condizioni

(2) Sia $f(x) = \frac{1-2\ln x}{x^2}$

a) determinare il dominio e studiare il segno di f

b) calcolare la derivata prima f' e seconda f'' e studiarne il segno

c) sulla base dei risultati ottenuti nel punto b), indicare dove f è crescente / decrescente e convessa/ concava evidenziando eventuali punti di massimo e minimo locali e punti di flesso

d) determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui di f e disegnare il grafico di f.

(3) Sia $f(x) = 3(x-1)\cos(2x-2) + 2x^2 - 3x + 2$ e sia $x_0 = 1$.

a) determinare il dominio di f
calcolare i polinomi di Taylor $p_1(x)$ di ordine $n=1$ e $p_2(x)$ di ordine $n=2$

b) scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ e disegnarla nel piano cartesiano.

c) scrivere la formula di Taylor di ordine $n=2$ con resto di Lagrange (esprimere il resto in forma generale, ossia non è necessario lo sviluppo delle derivate)

(4) Sia $f(x) = \frac{\cos x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$

a) determinare il dominio e studiare il segno di f in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, trovare l'area con segno A sottesa al grafico di f tra i punti $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$

b) enunciare il teorema di Lagrange ed illustrarlo graficamente. Applicare il teorema alla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1,4]$ e determinare esplicitamente il punto intermedio menzionato dal teorema.