EX 3 fila B

Analisi Matematica II

1) Enunciare il teorema relativo alla formula di Gauss Green nel piano

2) Usando la formula di Gauss Green nel piano, calcolare l'area racchiusa dalla curva piana

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Ris Sia D un dominio limitato piano e normale rispetto agli assi e sia $F(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora $\iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} P\,dx + Q\,dy$

ove $\partial^+ D$ è la frontiera orientata positivamente.

Scegliendo $P(x,y) = y \Rightarrow$ area $D = \iint_D dx\,dy = -\int_{\partial^+ D} y\,dx$

$Q(x,y) = x \Rightarrow$ area $D = \iint_D dx\,dy = +\int_{\partial^+ D} x\,dy$

area $D = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx$

Considero la rappresentazione parametrica dell'ellisse

$$\begin{cases} x = 6\cos\vartheta \\ y = 3\sin\vartheta \end{cases} \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$\Rightarrow$ area $D = \int_{\partial^+ D} x\,dy = \int_0^{2\pi} 6\cos\vartheta\,(3\sin\vartheta)'\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} 18\cos\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta =$

$= 18\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\,d\vartheta = 18\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\,d\vartheta = 18\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{2\cos 2\vartheta}{4}\,d\vartheta =$

$= 18\left[\frac{1}{2}\vartheta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2\vartheta\Big|_0^{2\pi}\right] = 18\left(\pi + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0)\right) = 18\pi.$