Dinamica dei sistemi di punti materiali

Obiettivo: Derivazione delle leggi, dei teoremi e dei principi della dinamica del punto materiale estendendoli ai sistemi di particelle o punti materiali (PM).

Abbiamo visto che per il punto materiale:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i\, \mathbf{F}_i$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad dE_{k,} = dW = \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \qquad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_R$$

Generalizzazione dei risultati relativi alla dinamica di una particella ai sistemi con un numero finito N di punti in termini di <u>grandezze dinamiche collettive</u> del sistema di particelle (o di PM).

Def. Sistema discreto di particelle (o di PM): $S = \{ m_i, i = 1 \dots N\}$

Def. Sistema continuo: $S=\int_M dm=\int_V \rho(r)dV$, essendo $\rho(r)=dm/dV$

Massa totale del sistema di particelle $M_S = \sum_1^N{}_i\, m_i$, $M_S = \int_M dm$

Grandezze dinamiche collettive = grandezze riferite a tutto S, nel caso di sistemi discreti di particelle (o PM) :

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i\, (m_i\, \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i\, E_{k,i} = \sum_1^N{}_i\, \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{Ps}/dt = ?$$

$$dE_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_O/dt = ?$$

Per capire cosa succede nel caso di un sistema discreto di PM S partiamo dall'equazione del moto della particella i-ma appartenente al sistema di P.M..

Equazione del moto della particella i–ma (*legge di Newton*):

$$m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^T{}_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} \qquad (1)$$

Scriviamo la forza risultante $\mathbf{F}_i^{(R)}$ agente sulla particella i–ma come la risultante delle forze interne $\mathbf{F}_i^{(I)}$ e delle forze esterne $\mathbf{F}_i^{(E)}$.

Cosa si intende per Forza interna e Forza esterna?

Forze esterne e forze interne: $\mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}$,

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_j \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\,\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_1^R{}_k \mathbf{F}^{(e)}{}_{ik} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ik} = -\,\mathbf{F}_{ki},]$$

Vale il principio di azione/reazione, per cui per ogni coppia di particelle appartenenti al sistema si avrà $\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = -\,\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji}$.

In generale, l'equazione del moto della singola particella i–ma è un'equazione differenziale funzione di (Nr_i+Nv_i+t).

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

E quindi per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in 6N+1 incognite $(N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t)$.

Impossibilità di risolvere analiticamente sistemi di 3N equazioni di Newton in 6N+1 incognite $(N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t)$. Il problema è senza soluzione perché indeterminato.

Solo in alcuni casi particolari è possibile risolvere analiticamente: ad esempio nel caso di un sistema di 2 P.M, come vedremo.

Cosa si può fare con i sistemi di punti materiali?

Cosa si sa fare con i sistemi di punti materiali?

Descrizione del moto attraverso la definizione di grandezze dinamiche collettive sopra definite.

In tale modo si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che delle singole particelle che lo formano.

Grandezze collettive = grandezze dinamiche riferite a tutto S:

$$\mathbf{F}_S^{(R)}=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{F}_i^{(R)}=\sum_1^N{}_i\,[\mathbf{F}_i^{(I)}+\mathbf{F}_i^{(E)}]=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{F}_i^{(I)}+\sum_1^N{}_i\,\mathbf{F}_i^{(E)}=\mathbf{F}^{(INT)}+\mathbf{F}^{(EXT)}$$

$$\mathbf{P}_S=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{p}_i=\sum_1^N{}_i\,(m_i\,\mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S}=\sum_1^N{}_i\,E_{k,i}=\sum_1^N{}_i\,½m_iv_i^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S}=\sum_1^N{}_i\,L_{O,i}=\sum_1^N{}_i\,\mathbf{r}_i\wedge\mathbf{p}_i$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di calcolare e dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{P}s/dt = ?$$

$$dE_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = ?$$

Calcolo della risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sul sistema S, a partire dall'equazione del moto (1):
Partendo dalla:

$$m_i\mathbf{a}_i=\mathbf{F}_i^{(R)}=\mathbf{F}_i^{(I)}+\mathbf{F}_i^{(E)} \qquad (1),$$

e sommando sulle N–particelle del sistema S si ottiene:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] =$$

$$= \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Ma a causa del principio di azione–reazione ($\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = -\,\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji}$) si avrà che $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$. Infatti: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\, [\sum_1^N{}_j\, \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij}] = \sum_1^N{}_{ij\ (j\neq i)}\, \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = 0$.

In conclusione sarà:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} \qquad (2)$$

Per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = -\,\mathbf{F}_{12}$ si ha infatti:

$$\sum_1^2{}_{ij\ (j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (-\,\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = -\,\mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:

$$\sum_1^3{}_{ij\ (j\neq i)}\, \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (-\,\mathbf{F}_{12}) + \mathbf{F}_{23} + (-\,\mathbf{F}_{13}) + (-\,F_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}.$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

In definitiva la risultante di tutte le forze agenti sul sistema:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

La risultante delle forse esterne che agiscono su un sistema di particelle è formalmente identica ($\mathbf{F}_S^{(R)}$) alla risultante di un sistema di forze agenti su una particella, per cui vale la legge di Newton. E' pensabile di trattare il sistema S come una super particella per cui si possa scrivere l'equivalente della II legge della dinamica che abbiamo derivato per il punto materiale ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)? Per la massa del sistema non c'è problema: $M_S = \sum_1^N{}_i\, m_i$ (3)

Per l'accelerazione a bisogna fare riferimento alla media pesata o media ponderata $\mathbf{a}_S$ delle accelerazioni delle singole particelle.

Cosa significa accelerazione media ponderata? E' il valor medio delle accelerazioni di tutte le particelle pesate per la loro massa.

E come media ponderata si ottiene così: $\mathbf{a}_S = \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i/\sum_1^N{}_i\, m_i$

ossia: $\mathbf{a}_S = \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i/M_S$

Per cui l'eq. (2): $\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)}$ si potrà scrivere anche come:

$$M_S\, \mathbf{a}_S = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Dato che $\mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$.

Vedremo fra un po' che $\mathbf{a}_S$ è, di fatto, l'accelerazione del centro di massa del sistema di punti materiali o sistema di particelle S.

<u>Centro di massa di un sistema di particelle.</u>

Definizione e proprietà: Vettore posizione del CM

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\, \mathbf{r}_i\, /\sum_1^N{}_i\ m_i$$

In termini delle coordinate cartesiane: $\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\,\mathbf{i} + y_{CM}\,\mathbf{j} + z_{CM}\,\mathbf{k}$

$(x_{CM} = \sum_i m_i\, x_i/\sum_i m_i,\ y_{CM} = \sum_i m_i\, y_i/\sum_i m_i,\ z_{CM} = \sum_i m_i\, z_i/\sum_i m_i)$

<u>In pratica</u>: $M_S\, \mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\, \mathbf{r}_{i,}$ e $M_S\, x_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\, x_i$, etc. etc.

N.B.: Il CM è una proprietà intrinseca del sistema e coincide con il suo baricentro. La sua posizione quindi è indipendente da Oxyz, mentre le sue coordinate dipendono dalla scelta del sistema Oxyz.

Calcolo del CM di due particelle a distanza *d* l'uno dall'altra:

Sistema $O'x'$ tale che m_1 si trovi in O' e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1 0 + m_2 d] / [m_1 + m_2] = m_2 d/[m_1 + m_2]$$

Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1 x_1 + m_2 x_2] / [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1 x_1 + m_2 (x_1 + d)] / [m_1 + m_2] \\ &= x_1 + m_2 d/(m_1+m_2) \\ &= x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{\mathbf{O}'} + \mathbf{r}'_{CM}$

<u>Proprietà distributiva del CM:</u>

Centro di massa di due sistemi di punti materiali S e S′

Il centro di massa di due sistemi di particelle $S = \{m_i, i = 1 \ldots N_1\}$ e $S' = \{ m_j, j = 1 \ldots N_2\}$ corrisponde al CM di due particelle aventi massa uguale alle masse totali M_1 e M_2 dei due sistemi e poste nel centro di massa di ciascuno dei due sistema:

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CM} &= \sum_{i=1}^{N1+N2}{}_i\, m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{N1+N2}{}_i\, m_i \\ &= [\sum_{i=1}^{N1}{}_j\, m_j \mathbf{r}_j + \sum_{i=1}^{N2}{}_k\, m_k \mathbf{r}_k]/[\sum_{i=1}^{N1}{}_j\, m_j + \sum_{i=1}^{N2}{}_k\, m_k] = \\ &= [M_1 \mathbf{r}_{CM,1} + M_2 \mathbf{r}_{CM,2}]/[M_1 + M_2] \end{aligned}$$

Utilità della proprietà distributiva nel calcolo del CM di un sistema continuo fatto di due figure geometriche regolari.

<u>Centro di massa di sistemi continui.</u>

Centro di massa di un sistema continuo, in termini di dm:

$$\mathbf{r}_{CM} = [\int_M \mathbf{r}dm] / [\int_M dm] = [\int_V \mathbf{r}\ \rho(\mathbf{r})dV[/ [\int_V \rho(\mathbf{r})dV];$$

$x_{CM} = [\int_M xdm] / [\int_M dm] = [\int_V x\ \rho(\mathbf{r})dV[/ [\int_V \rho(\mathbf{r})dV]$, etc. etc.

Un sistema continuo e omogeneo avente forma geometrica regolare ha il CM coincidente con il baricentro (= punto di massima simmetria) della figura geometrica, piana o solida, che rappresenta sistema continuo.

Esempi di calcolo del centro di massa di alcuni sistemi continui:

Semi–disco: $y_{CM} = 4R/3\pi$;

Semi–sfera: $z_{CM} = 3R/8$;

Semi–anello: $y_{CM} = 2R/\pi$;

Guscio semi–sferico: $z_{CM} = R/3$;

Cono: $z_{CM} = h/4$ (distanza misurata dalla base del cono).

<u>Velocità e accelerazione del CM di un sistema di P.M.</u>:

1) $\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \mathbf{v}_i / \sum_{i=1}^{N} m_i$ ($v_{X,CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \mathbf{v}_{xi} / \sum_{i=1}^{N} m_i$, etc.)

2) $\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^{N} m_i$ ($a_{X,CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ a_{xi} / \sum_{i=1}^{N} m_i$, etc.)

<u>In alternativa</u> $\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{a}_{CM}$ si ottengono per derivazione da:

$$M\ \mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \mathbf{r}_i :$$

1’) $M\ \mathbf{v}_{C\,M} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \mathbf{v}_i$ direttamente da $M\ d\mathbf{r}_{CM}/dt = \sum_i m_i\ (d\mathbf{r}_i/dt)$

2’) $M\ \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\ \mathbf{a}_i$ direttamente da $M\ d\mathbf{v}_{CM}/dt = \sum_i m_i\ (d\mathbf{v}_i/dt)$

Pertanto l'accelerazione $\mathbf{a}_S$, derivata precedentemente, non è altro che la media ponderata delle accelerazioni delle singole particelle:

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i \,/\, \sum_{i=1}^{N} m_i$$

E quindi per un Sistema di P.M., dato che $\sum_1^N {}_i = M_S$ (3), si avrà:

$$M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)} \qquad (4)$$

dato che la risultante di tutte le forze interne è nulla: $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$.

La (4) è la Iª Legge cardinale della dinamica dei sistemi.

Questa relazione è formalmente identica alla legge di Newton per una super-particella di massa M_S soggetta all'azione di una risultante di forze $\mathbf{F}_S^{(R)}$ ottenuta sommando tra di loro le sole forze esterne agenti sulle particelle del sistema.

In virtù delle proprietà del CM del sistema di particelle, la legge $M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_S^{(R)}$ può essere espressa come:

$$d\mathbf{P}_S \,/\, dt = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

oppure come:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(E)};$$

o, più semplicemente, come:

$$M_S\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

La Iª Legge cardinale è nota anche come teorema del centro di massa del sistema di punti materiali: essa sancisce che un sistema di particelle, con riferimento all'azione di un insieme di forze esterne, si muove come un punto materiale avente massa M_S ($M_S = \sum_{i=1}^{N} m_i$) soggetto alla forze risultante $\mathbf{F}^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(E)}$.

Applicazioni della I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

A) Sistema isolato: (non agiscono forze esterne: $\mathbf{F}^{(e)}_{ik} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{F}^{(e)}_{ik} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} [\mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_{i=1}^{N} [\sum_1^R{}_k \mathbf{F}^{(e)}_{ik}] = \mathbf{0}$.

E dato che anche $\mathbf{F}^{(INT)}=0$, si avrà anche $\mathbf{F}_S^{(R)} = 0$, da cui

$$d\mathbf{P}_S / dt = \mathbf{0}$$

Conseguenze: Conservazione della quantità di moto di S:

$$\mathbf{P}_S = \text{costante}$$

N.B.: Si tratta di un fatto sperimentale, sempre verificato.

$\mathbf{P}_S = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{P}_S = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i\ m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \text{cost};$

La conservazione della quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ di un sistema isolato (sul quale non agiscono forze esterne) implica che il centro di massa del sistema si muove come una particella libera:

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{costante.}$$

Esempio di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne:

Sistema astronauta-navicella spaziale che galleggia liberamente nel vuoto si muove di moto rettilineo uniforme con $\mathbf{v}_{CM}$ costante:

$$\mathbf{P}S = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante.}$$

$$d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{F}^{(i)}_{12} = \mathbf{F}^{(i)}_{21} \qquad \Rightarrow \text{Principio A/R}$$

Precisazione relativa alla definizione di sistema isolato:
– quando tutte le forse esterne sono nulle (cioè: $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0}$),

– quando la risultante delle forse esterne agenti sulla singola particella è nulla ($\mathbf{F}i^{(E)} = 0$), il sistema si comporta come se fosse isolato.

Conseguenze del principio di conservazione della $\mathbf{P}_S$:

Conservazione di una o più delle componenti della quantità di moto totale del sistema isolato:

$$Mv_{CM,X} = P_{S,X.}$$

I casi in cui si conserva una sola componente:
– granata che esplode in aria,
– uomo che si sposta su una piattaforma posta su un piano liscio;
– moto di un corpo di massa m su un cuneo di massa M appoggiato a un piano orizzontale liscio: $0 = m\, v_x + M\, V_x$.

B) Sistema di punti materiali non–isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$$\Rightarrow M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{non è più costante, ma } \mathbf{P}_S(t)$$

Questo fatto consegue dalla relazione fra la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze agenti sulle particelle dei sistema:

$$d\mathbf{P}_S/dt = d(\textstyle\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i)/dt = \sum_{i=1}^{N} (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(R)}$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{N} [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Essendo, sempre, $\mathbf{F}^{(INT)} = \mathbf{0}$ per il principio di azione–reazione.

-I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi in un sistema di riferimento inerziale o del laboratorio (sistema L) si può anche scrivere come: $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \quad \text{o equivalentemente} \quad \Rightarrow \quad M\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

Esiste una seconda legge (II^a legge cardinale) della dinamica di sistemi che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S rispetto ad un polo O fisso, in un sistema di riferimento inerziale Oxyz (sistema L), al momento delle forze esterne riferito al medesimo polo O.

La II^a legge cardinale è espressa, di fatto, dal teorema del momento della quantità di moto per un sistema S di punti materiali, e viene, in qualche testo, impropriamente chiamata Legge di Newton per il moto rotazionale del sistema:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Si tratta di un'estensione del teorema del moto della quantità di moto di punto materiale:

$$d\mathbf{L}_O/dt = \boldsymbol{\tau}_O = \mathbf{r}\wedge\mathbf{F}_R$$

al sistema S di più punti materiali, e si deriva a partire dal momento della quantità di moto totale $\mathbf{L}_{O,S}$ del sistema S:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i\wedge\mathbf{p}_i$$

calcolando:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_{i=1}^{N} d\mathbf{L}_{O,i}/dt = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge\mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_i \mathbf{r}_i\wedge(\mathbf{F}_i^{(I)}+\mathbf{F}_i^{(E)})$$

Nel caso di un <u>sistema isolato</u> di particelle si può dimostrare, in base a evidenze sperimentali, mai contraddette, che $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva dato che, come sappiamo dalla I^a legge cardinale (4), il sistema, in assenza di forze esterne, può essere considerato nel suo insieme come una super-particella libera, il cui momento della quantità di moto si conserva. E quindi dev'essere:

$$\sum_{1\ i}^{N} \mathbf{r}_i\wedge\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i\wedge \sum_{j\,(j\neq i)}\mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij}\wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

Infatti per un sistema di due particelle (sietema a due corpi):

$\sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{2} \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = ½\,[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] = ½ \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

mentre, per un sistema di tre particelle si avrà:

$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = ½\,[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] = ½ \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ e il momento risultante dei momenti delle forze interne $\boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = 0$. Cioè:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = 0; \qquad \boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = 0).$$

2) Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{OS}/dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = =\sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

essendo, come abbiamo visto $\sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

La II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi è impropriamente chiamata Legge di Newton per il moto rotazionale del sistema.

Riassumendo: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II[a] legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O\,/dt = d\sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Le leggi più sopra sono state ricavate in un sistema inerziale Oxyz, che d'ora in avanti verrà indicato come sistema L (L=laboratorio).

Dinamica di sistemi di punti materiali: derivazione delle leggi cardinali della dinamica dei sistemi di particelle nel sistema C.

Sistema C: Sistema di riferimento del centro di massa.

Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi cartesiani paralleli agli assi x,y,z di Oxyz.

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0};$

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0};$

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}.$

Calcolo delle grandezze dinamiche: $\mathbf{P}'_S$, $E'_{S,k}$ e $\mathbf{L}'_{CM}$.

$\mathbf{P}'_S = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\mathbf{v}'_i = M\,\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0};$

$E'_{k,S} = \sum_{i=1}^{N} E'_{k,i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,v'^2_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (p'^2_i/m_i)$

$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$

Sistema C = sistema a quantità di moto totale nulla:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{0} \text{ (con dimostrazione).}$$

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$, ma

$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i - M\mathbf{a}_{CM}$, dove

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{a}_i = \sum_{1}^{N}{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

E quindi:

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \mathbf{F}^{(EXT)} - M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$$

che si può scrivere come $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, che è esattamente la I^a legge cardinale espressa dall’eq. (2)

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM,S}^{(EXT)}$.

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (indipendentemente dal fatto che il CM sia o non sia un punto fisso, e, in quest’ultimo caso, anche quando esso si muovesse di moto non–uniforme).

Nel sistema L:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a :

$$M\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_{1}^{N}{}_i\, \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_{1}^{N}{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a'}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a'}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{a}_i - M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$ e quindi:

$$d\mathbf{P'}_S/dt = \sum_1{}^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L'}_{CM,S}/dt = \sum_1{}^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM,S}^{(EXT)}$.

Riassumendo: Abbiamo derivato le due leggi cardinali in termini delle due grandezze collettive $\mathbf{P}_S$ e $\mathbf{L}_{O,S}$ (Sistema L) e di $\mathbf{P'}_S$ e $\mathbf{L'}_{CM,S}$ (Sistema C) e dimostrato che il Sistema C può essere usato in alternativa al sistema L, dal momento che in esso valgono entrambe le leggi cardinali.

Nel sistema del centro di massa (Sistema C) abbiamo definito le grandezze collettive $\mathbf{P'}_S$ **e** $\mathbf{L'}_{CM,S}$, resta da definire $E'_{k,S}$.

Consideriamo ora l'energia cinetica di un sistema S:
$E_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i \; E_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i \; ½\, m_i v_i^2$. (nel sistema L, ancorato in O)

$E'_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i \, E'_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i \; ½\, m_i v'^2_i$ (nel sistema C, ancorato a CM)

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna del sistema S: $E_{k,S}^{INT}$

Teoremi di Konig

Teoremi di Konig: mettono in relazione le grandezze dinamiche collettive (quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica) calcolate nel sistema L e con le equivalenti grandezze collettive calcolate nel sistema C:

- quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P'}_S = M\mathbf{v}_{CM}$.

N.B.: Dimostrazione (banale):

$$\mathbf{P}_S = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = \sum_i m_i\,(\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v'}_i) = (\sum_i m_i\,)\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \; m_i\mathbf{v'}_i = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{0}$$

-momento della quantità di moto: $\mathbf{L}_{O,S}= \mathbf{r}_{CM}\wedge M\mathbf{V}_{CM} +\mathbf{L}'_{CM,S}$

N.B.: Dimostrazione:

$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_i) \wedge m_i(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) =$
$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_{CM}\wedge m_i\mathbf{v}_{CM}+\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM}+\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i+\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$
$= \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_i m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_i \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM}\wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

perchè: $\sum_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM}=\sum_i (m_i\mathbf{r}'_i)\wedge\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$
e cosi' pure: $\sum_i \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge \sum_i m_i\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$.

<u>Nota Bene</u>: Altre proprietà del momento angolare:
Dalla relazione fra i momenti angolari del sistema S calcolati rispetto al polo fisso O e rispetto a un punto O', si dimostra che il teorema del momento angolare vale oltre che per O' fisso, anche quando O' non è fisso purché sia coincidente con il CM del sistema di punti materiali: O' = CM!

Validità del teorema del momento angolare rispetto al CM, calcolato usando sia le grandezze in L che in C:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$$

Dimostrazione:

$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = \sum_{i=1}^{N} r'_i\wedge m_i\mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i\wedge(\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}$

e

$d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_{i=1}^{N} r_i' \wedge m_i\mathbf{a}'_i = \sum_{i=1}^{N} r_i' \wedge(\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} - m_i\mathbf{a}_{CM}) =$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_i \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$$

perchè: $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i\wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} = 0$ e $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{a}_{CM}=\sum_{i=1}^{N} (m_i\mathbf{r}'_i)\wedge\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$.

-dell'energia cinetica: $E_{k,S} = ½\, Mv_{CM}^2 + E_{k,S}' = E_{k,CM} + E_{k,INT}$

Dimostrazione:
$E_{k,S} = =\sum_i E_{k,i} = ½ \sum_i m_i v_i^2 = ½ \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = ½ \sum_i m_i (\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i)\cdot(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = ½ \sum_i m_i v_{CM}^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + ½ \sum_i m_i v'^2_i = ½ Mv_{CM}^2 + E_{k,S}'$.

Teoremi di Konig: Scomposizione del moto di un sistema di punti materiale (es un solido) nella somma del suo moto orbitale e del suo moto intrinseco o interno.

Esempi: moto della luna (sfera) attorno alla terra = moto orbitale di un P.M. di massa M del luna con velocità v_{CM} (Sist. L) + moto intrinseco della luna riferito al suo centro di massa (Sist. C).

Definizione di manubrio: sistema rigido costituito da due corpi puntiformi attaccati alle estremità opposte di un’asta rigida sottile di massa trascurabile (che ha il compito di mantenere i due corpi a distanza fissa durante il moto).
N.B:: Si parla di manubrio simmetrico quando le due masse sono uguali tra loro, e di manubrio asimmetrico in caso contrario.

Eenergia meccanica totale di un sistema di particelle:

Resta da vedere cosa comporta il teorema dell'energia per un sistema di particelle, che sancisce l’equivalenza fra la variazione di energia cinetica e il lavoro delle forze agenti.

Il teorema dell’energia di un sistema di particelle (in termini finiti)

$$\Delta E_{k,S,\,AB} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W_{S,AB}$$

dove $W_{S,AB}$ è il lavoro di tutte le forze (interne ed esterne) agenti sui punti materiali del sistema S quando passa dallo stato iniziale A allo stato finale B.

N.B.: Lo stato di un sistema è definito dall'insieme delle velocità e delle posizione dei singoli punti che costituiscono il sistema S.

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle in termini infinitesimi o elementari si scrive come:

$$dE_{k,S} = dW_S = dW_S^{(EXT)} + dW_S^{(INT)}.$$

Lavoro elementare delle forze esterne:

$$dW_S^{(EXT)} = \sum_{i=1}^{N} dW^{(E)}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(E)}\cdot d\mathbf{r}_i \qquad (5)$$

Lavoro elementare delle forze interne:

$$dW_S^{(INT)} = \sum_{i=1}^{N} dW^{(I)}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(I)}\cdot d\mathbf{r}_i = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}{}_{(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)}\cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

N.B.: $\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)}\cdot d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N}[\sum_1^N{}_{j\,(j\neq i)}\mathbf{F}^{(i)}_{ij}\cdot d\mathbf{r}_i] = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}{}_{(j\neq i)} \mathbf{F}^{(i)}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_{ij} \neq 0$

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle:

$$\Delta E_{k,S,\,AB} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W_{S,AB}^{(EXT)} + W_{S,AB}^{(INT)}$$

Ora, se le forze interne sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale delle forze interne:

$$dE_{p,S}^{(INT)} = -\,dW_S^{(INT)} = -\sum_{i=1}^{N} dWi^{(I)} = -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}{}_{(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)}\cdot d\mathbf{r}_{ij}$$

Si avrà che la (5) diventa:

$$dE_{k,S} = dW_S^{(EXT)} - dE_{p,S}^{(INT)}, \text{ ossia } dE_{k,S} + dE_{p,S}^{(INT)} = dW_S^{(EXT)}$$

<u>Def. di Energia propria</u> del sistema S: $U_S = E_{k,S} + E_{p,S}^{INT}$.

Vale la relazione $d(E_{k,S} + E_{p,S}^{INT}) = dW_S^{EXT}$, ossia $dU = dW^{EXT}$

Se poi anche le forze esterne sono conservative, e quindi si può definire un'energia potenziale delle forze esterne:

$$dE_{p,S}^{(EXT)} = -\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^{N} dWi^{(E)} = -dW_S^{(EXT)},$$

allora si potrà scrivere: $dU_S = -dE_{p,S}^{(EXT)}$,

e quindi $d(U_S + E_{p,S}^{(EXT)}) = 0$, cioè: $dE_{T,S} = 0$,

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$.

Conservazione della Energia totale meccanica $E_{T,S}$ di un sistema S di particelle soggette all'azione di sole forze conservative:

$$E_{T,S} = U + E_p^{(EXT)} = \text{costante del moto.}$$

Esempio: Due corpi puntiformi collegati fra loro da una molla in moto nel campo di forza gravitazionale della terra.

Nel sistema C, ancorato al CM: $E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$ e la somma $E_{k,S}^{INT} + E_{k,S}^{INT} = (E_{k,S}+E_P)^{INT} = U_S^{INT}$, che è chiamata anche energia interna.

<u>Nota Bene</u>: Dipendenza dell' $E_{k,S}$ dal sistema di riferimento scelto e indipendenza dell'$E_{p,S}^{(INT)}$ dal sistema di riferimento scelto.

In conclusione, i teoremi di Konig consentono di scomporre il moto di un sistema S nel moto orbitale del suo CM, riferito ad un osservatore inerziale Oxyz, e nel moto intrinseco o interno del sistema rispetto al suo CM, riferito al sistema CMxyz .

<u>Esempio</u>: moto della luna attorno alla terra descritto in un sistema di riferimento inerziale usato per l'osservazione = moto orbitale di un punto materiale di massa M pari alla massa della luna che si muove con velocità $\mathbf{v}_{CM}$ + moto intrinseco rispetto al CM della luna, indipendente dal sistema riferimento inerziale usato per l'osservazione.

Sistemi di due particelle (o Problema dei due corpi)

Problema dei due corpi: studio del moto relativo di due corpi supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua.

Esempio: moto (relativo) di due corpi celesti sotto l'azione della forza gravitazionale moto di un pianeta relativo al sole, moto della luna rispetto alla terra, moto dell'elettrone rispetto al protone nell'atomo di idrogeno ma anche il moto (relativo) di una coppia di punti materiali collegati tra loro da una molla, oppure da un'asta rigida e di massa trascurabile.

Le grandezza cinematiche (posizione velocità e accelerazione) del centro di massa del sistema dei due corpi nel sistema L e C:

Vettori $\mathbf{r}_{CM}$, $\mathbf{v}_{CM}$, $\mathbf{a}_{CM}$ del centro di massa nel sistema L:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i + m_2\mathbf{r}_2) / (m_i + m_2)$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{v}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{v}_i + m_2\mathbf{v}_2) / (m_i + m_2)$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{a}_i + m_2\mathbf{a}_2) / (m_i + m_2)$$

Vettori $\mathbf{r}'_{CM}$, $\mathbf{v}'_{CM}$, $\mathbf{a}'_{CM}$ del centro di massa nel sistema C:

$$\mathbf{r}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{r'}_i' / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i' + m_2\mathbf{r}_2') / (m_i + m_2) = 0$$

$$\mathbf{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{v'}_i' / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{v}_i' + m_2\mathbf{v}_2') / (m_i + m_2) = 0$$

$$\mathbf{a}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \, \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{a}_i' + m_2\mathbf{a}_2') / (m_i + m_2) = 0$$

Grandezze cinematiche relative nel sistema L: $\mathbf{r}_{12,}$ $\mathbf{v}_{12}$ $\mathbf{a}_{12}$
e nel sistema del centro dimassa (C): $\mathbf{r}_{12}'$, $\mathbf{v}_{12}'$, e $\mathbf{a}_{12}'$

N.B.: I vettori posizione, velocità e accelerazione relativa di due PM non devono dipendere dal sistema di riferimento L o C che sia. Infatti:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_{12}' \qquad (\text{e } \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{21}'),$$
$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_{12}' \qquad (\text{e } \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_{21}'),$$
$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1' - \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_{12}' \qquad (\text{e } \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{21}').$$

I passo: Vogliamo trovare le relazioni che legano le grandezza cinematiche (posizione, velocità e accelerazione) individuali dei due corpi in termini delle corrispondenti grandezze relative nel sistema L e nel sistema C:

Vettore posizione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$$

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}'$$
$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}'$$

Vettore velocità della particella m_i in C:

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2\, \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}'$$
$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1\, \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{21}'$$

Vettore accelerazione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{12}'$$
$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{21}'$$

N.B.: Nel caso in cui il sistema delle due particelle sia isolato (i.e.: quando non $\exists$ $\mathbf{F}_{ik}^{(e)}$ e quindi $\mathbf{F}_i^{(E)} = 0$, per i = 1, 2), per cui quindi $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$, si ha che l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_i'$ e l'accelerazione assoluta $\mathbf{a}_i$ di ciascuna particella coincidono e sono legate all'accelerazione relative $\mathbf{a}_{ij}$ (oppure $\mathbf{a}_{ij}'$) dalle relaizioni:

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1 = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$$

<u>II passo: Studio del moto relativo di due corpi</u> supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(r_{12})$

Esempi: $\mathbf{F}_G(r_{21}) = -\gamma\, Mm\, \mathbf{r}_{21}/r_{21}^3$; $\mathbf{F}_G(r_{12}) = -\gamma\, Mm\, \mathbf{r}_{12}/r_{12}^3$

$\mathbf{F}_{el}(x_{21}) = -k\,[(x_2-x_1) - l_0]$; $\mathbf{F}_{el}(x_{12}) = -k\,[(x_1-x_2) + l_0]$

Equazione del moto di ognuno dei due PM espressa dalla legge di Newton: $m_i\mathbf{a_i} = \mathbf{F}(r_{ij})$, con i,j = 1,2 e ($j\neq i$):

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = -\mathbf{F}_{12}$$

Accelerazione relativa della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

Definizione di massa ridotta μ del sistema: $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$
Sfruttando la definizione di massa ridotta μ: $1/\mu = [1/m_1 + 1/m_2]$

Si avrà:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}/\mu$$

Questa relazione esprime i<u>l moto relativo</u> delle 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione, che è stata ottenuta partendo <u>dall'equazione del moto delle 2 particelle</u>, può essere scritta anche così:

$$\mu\mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Equazione del moto relativo dei due corpi in termini della loro massa ridotta: $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2) = m_1/(1 + m_1/m_2)$

Essa è l'equazione del moto in un SRI (Sistema L) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza F_{12}.

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1' - \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_{12}'$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure:

$$\mu\mathbf{a}_{12}' = \mathbf{F}_{12}$$

Questa è l'equazione del moto nel Sistema C (ancorato al CM del sistema) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza F_{12}.

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa μ (massa efficace del sistema) soggetta all'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua $\mathbf{F}_{12}$ studiato nel sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: A rigore, lo studio del moto relativo in un SRI di due corpi celesti soggetti all'azione della forza di attrazione gravitazionale è ricondotto allo studio, nel sistema di riferimento C, del moto di un corpo di massa μ che si muove sotto l'azione di $\mathbf{F}_G$. Tuttavia ….

Cosa succede quando $m_1 >> m_2$ (sistemi sole-pianeta, pianeta-satellite, come ad esempio il sistema terra–luna: massa terra >> massa luna; etc. o nel caso dell'atomo di idrogeno: massa protone >> massa elettrone).

La massa ridotta $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2) = m_2/(1 + m_2/m_1) \cong m_2$ mentre la posizione del CM del sistema "coincide" con m_1
e questo giustifica l'approssimazione usata nell'espressione della legge di gravitazione universale fatta da noi finora e l'adozione del sistema di riferimento con origine O ancorato alla massa m_2.

In generale, se le due masse sono confrontabili, si deve studiare il moto, nel sistema C, in termini della massa ridotta μ.

Esempio: Caso del moto roto-traslatorio su un piano orizzontale perfettamente liscio di manubrio costituito da 2 corpi puntiformi ancorati alle estremità di un'asta rigida lunga L e priva di massa. Calcolo della tensione della asta:

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{T}_1$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{T}_2$$

Per il principio di A/R: $\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$, ma $T_2 = T_1$

$$T = \mu\, v_{12}^2/r_{12} = \mu\, v_{12}^2/L.$$

N.B.: Il modulo T dipende dalla velocità di rotazione ω del manubrio, atteso che $v_{12} = L\omega$, che, quindi, deve essere nota.

<u>Esercizio</u>: Coppia di corpi puntiformi posti in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio e collegati da una molla a riposo. A $t_0 = 0$ viene applicato al corpo di massa m_1 un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\,\mathbf{i}$. Studiare il moto del sistema dopo l'applicazione dell'impulso, e derivare, in particolare, per $t > t_0$:
a) la legge oraria $x_{CM}(t)$ del moto del CM due corpi;
b) le leggi orarie dei due corpi $x_1'=x_1'(t)$ e $x_2'=x_2'(t)$ nel sistema C;
c) le leggi orarie dei due corpi $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ nel sistema L.

Sia $x_{21}(t)$ la legge oraria del moto relativo del P.M. 2 rispetto al P.M. 1, che si ottiene risolvendo l'equazione del moto:

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21}/\mu, \qquad \text{con } \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{el}\,(x_{21}) = -\,k\,[(x_2-x_1)-l_0]\mathbf{i}$$

e ricordando che:

$x_1'\,(t) = [m_2/(m_1+m_2)]\; x_{12}\,(t)$ e $x_2'\,(t) = [m_1/(m_1+m_2)]\; x_{21}(t)$

N.B.: $x_1(t) = x_{CM}(t) + x_1'\,(t) = [x_{CM}(0) + J_0t/(m_1+m_2)] + m_2x_{12}(t)$

$x_2(t) = x_{CM}(t) + x_2'\,(t) = [x_{CM}(0) + J_0t/(m_1+m_2)] + m_1x_{21}(t)$

Espressione delle grandezze dinamiche collettive nel sistema C e delle relazioni di Konig per i sistemi di due particelle.

Espressione delle grandezze dinamiche collettive nel sistema C

– Quantità di moto:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{0},$$

da cui $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$, e ricordando che $\mathbf{v}_1' = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$,

Si avrà anche:
$\mathbf{p}_1' = m_1\mathbf{v}_1' = m_1m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) = \mu\,\mathbf{v}_{12}$
$\mathbf{p}_2' = m_2\mathbf{v}_2' = m_2m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) = \mu\,\mathbf{v}_{21} = -\mu\,\mathbf{v}_{12}$.

Quindi: $p_1' = p_2' = \mu\, v_{12} = p'$

N.B.: Il modulo della quantità di moto di ognuna delle due particelle, nel sistema C, equivale al modulo della quantità di moto di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

Ovviamente:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mu\,\mathbf{v}_{12} - \mu\,\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

– Energia cinetica interna: E_k^{INT}

$$E_k^{INT} = ½\mu\, v_{12}^2 = p'^2/2\mu$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} E_k^{INT} &= ½\, m_1\, v_1'^2 + ½\, m_2\, v_2'^2 \\ &= ½\, m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)]^2 + ½\, m_2\, [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)]^2 = \\ &= ½\, m_1m_2^2\, \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 + ½\, m2m^{12}\, \mathbf{v}_{21}^2/(m_1+m_2)^2 = \\ &= ½\, m_1m_2\,(m_1+m_2)\,\mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 = ½\, m_1m_2\,\mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2) = \\ &= ½\,\mu\,\mathbf{v}_{12}^2 \end{aligned}$$

N.B.: L'energia cinetica interna di un sistema di 2 particelle equivale all'energia cinetica di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

– Momento angolare interno o intrinseco: $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12} .$$

Dinostrazione:

$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_1' \wedge m_1 \mathbf{v}_1' + \mathbf{r}_2' \wedge m_2 \mathbf{v}_2' =$

$= m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \wedge m_2 [m_1 \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] =$

$= m_2 \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + [- m_1\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)] \wedge m_2 [- m_1 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge m_1 m_2^2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 + \mathbf{r}_{12} \wedge m_1^2 m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2^2/(m_1+m_2)^2 + m_1^2 m_2/(m_1+m_2)^2]\, \mathbf{v}_{12} =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2\, (m_1+m_2)/(m_1+m_2)^2]\, \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}$

N.B.: Il momento angolare intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$ (riferito al CM) di un sistema di 2 particelle equivale al momento della quantità di moto (riferito ad un punto O) di una particella di massa μ che si trova nel punto individuato dal raggio vettore posizione relativa $\mathbf{r}_{12}$ che si muove con la velocità relativa delle due particelle $\mathbf{v}_{12}$.

N.B.: I teoremi di Konig per i sistemi di due corpi: mettono in relazione le grandezze collettive nel sistema L e nel sistema C.

N.B.: La velocità $\mathbf{v}_{CM}$ di un sistema isolato è costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$$\mathbf{P}_S = M\,\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}_S' = M\,\mathbf{v}_{CM}$$

$$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT} = \tfrac{1}{2}\,M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}\,\mu\, v_{12}^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}$$

Risoluzione di alcuni problemi di dinamica dei sistemi a 2 corpi:

1) Due blocchi di massa m_1 e m_2 , inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0, con l’asse di simmetria lungo l’asse x. All’istante t = 0 viene applicato al blocco di massa m_1 in direzione parallela all’asse di simmetria della molla un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\,\mathbf{i}$**.** Studiare il moto del sistema, determinando, in particolare, per t > 0:

a) la posizione iniziale del CM,
b) la legge oraria del moto del CM,
c) le legge oraria del moto relativo dei sue blocchi;
d) le leggi orarie del moto dei due blocchi nel sistema C;
e) le leggi orarie dei due blocchi nel sistema L.

2) Due blocchi di massa m_1 e m_2, posti su piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0, con l’asse di simmetria lungo l’asse x. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con la massa m_1 appoggiata alla base di una parete verticale fissa con la molla completamente compressa tramite una fine ancorata alla due masse. All’istante t = 0 la molla viene lasciata espandere, e nell’istante t_0 in cui la molla raggiunge la sua lunghezza di riposo, la massa m_1 si stacca dalla parete**.** Studiare il moto del sistema per t>0, calcolando espressamente nel sistema di riferimento del laboratorio:

a) l’accelerazione del CM del sistema all’istante $t = 0_+$;
b) la legge oraria del moto del CM dopo che il blocco di massa m_1 ha abbandonato la parete verticale;
c) le leggi orarie del moto dei due blocchi nel sistema del CM.

Teoremi della dinamica per i sistema S di particelle

A) Teorema dell'impulso applicato ad un sistema S:

$$\mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{P}_S$$

dove $\Delta\mathbf{P}_S = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{p}_i$.

B) Teorema del momento dell'impulso:

$$\mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{J}_0 = = \Delta\mathbf{L}_{0,S} \ .$$

con $\Delta\mathbf{L}_{0,S}\ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{0,i} \wedge \Delta\mathbf{p}_i$.

Esempi di applicazione:

1) Si consideri un manubrio asimmetrico, posto in quiete su un piano orizzontale liscio incardinato a una cerniera coincidente con il corpo di massa m_1. Studiare il moto di un manubrio dopo l'applicazione di un impulso istantaneo $\mathbf{J}_0$ in corrispondenza del corpi di massa m_2 in direzione ortogonale all'asse principale di simmetria del manubrio. Determinare in particolare:
a) velocità del CM;
b) velocità angolare di rotazione del manubrio;
c) tensione dell'asta,
d) energia cinetica interna e momento angolare interno.

2) Manubrio (simmetrico o asimmetrico) con due masse m_1 e m_2, inizialmente posto in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio. All'istante $t = 0$ si applica un impulso alla particella m_2 un impulso $\mathbf{J}_0$ che formi un angolo θ_0 con l'asse di simmetria principale del manubrio. Studiare il moto del sistema calcolando:
a) velocità del CM;
b) velocità angolare di rotazione del manubrio;
c) tensione dell'asta,
d) energia cinetica interna e momento angolare interno.