Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2016/17
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

16 febbraio 2017

1. Si decida (motivando la risposta!) se sono veri o falsi i seguenti enunciati.
   (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ è un'estensione di Galois. (*3 punti*)
   (b) $\mathrm{Gal}(x^4 - 16/\mathbb{Q})$ è un gruppo ciclico. (*3 punti*)
   (c) $x^5 + 2x^2 + 2$ è un polinomio separabile su $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. (*2 punti*)

2. Sia $K \subset F$ un'estensione di Galois il cui gruppo di Galois $G = \mathrm{Gal}(F/K)$ è isomorfo al gruppo di Klein $\mathcal{V}$. Quanti sono i campi intermedi propri $K \subset L \subset F$? (*4 punti*)

3. Sia K un campo.
   (a) Si definisca quando un'estensione di campi $K \subset F$ è detta estensione per radicali.
   (b) Si definisca quando un polinomio $f \in K[x]$ è risolubile per radicali.
   (c) Si dia un esempio di un'estensione per radicali sul campo $K = \mathbb{Q}$. (*8 punti*)

4. Siano $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e $f = x^2 + x + 2 \in K[x]$. Consideriamo $F = K[x]/(f)$ e $\alpha = \overline{x} \in F$.
   (a) F è un campo? (*1 punto*)
   (b) Quanti elementi ha F? (*1 punto*)
   (c) Si determini una K-base di F e si elenchino tutti gli elementi di F. (*4 punti*)
   (d) Si verifichi che $F = K(\alpha)$. (*2 punti*)
   (e) Si mostri che F è il campo di riducibilità completa del polinomio f su K e si scomponga f in fattori lineari in $F[x]$. (*2 punti*)

Nome: .... Matricola: .... Punteggio totale: