

• 1. In un insieme ordinato, un elemento può essere, al tempo stesso, massimale e minimale? ed essere al tempo stesso massimo e minimo?

✕ 2. Dato un insieme *finito* E , si descriva una catena massimale di $\mathcal{F}(E)$ (l'ordinamento è sempre quello per inclusione).

• 3. Si dimostri che se in un insieme ordinato finito vi è un unico elemento massimale, esso è massimo.

• 4. Si consideri l'insieme $\mathbb{N}^+$ degli interi positivi, ordinato per divisibilità (cioè $m \leq n$ significa: m è divisore di n). Riconoscere che si tratta di un ordinamento filtrante e che, dati due elementi a e b in $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei "seguenti comuni" (cioè l'insieme $\{x: x \geq a, x \geq b\}$) ha un elemento minimo. Come viene chiamato abitualmente questo? Analogamente, si dimostri che l'insieme dei "precedenti" comuni di a e b ha un elemento massimo. Come si possono individuare in $\mathbb{N}^+$, in termini di questo ordinamento, i numeri primi?

5. Si consideri ancora $\mathbb{N}^+$ ordinato per divisibilità. Fra i seguenti sottoinsiemi si ricerchino quelli che sono catene e, fra queste, le catene massimali (cioè non ampliabili).

Per ogni catena non massimale, si cerchi una catena massimale che la contiene:

$$\{2n: n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad \{n^2: n = 1, 2, 3, \dots\},$$

$$\{n!: n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad \{p^n: n = 1, 2, 3, \dots\} \quad (p \text{ numero primo}),$$

$$\{2^n: n = 1, 2, 3, \dots\}, \quad \{10^n: n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

• 6. Il principio d'induzione si applica spesso in questa forma: sia T un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ con le seguenti proprietà: $0 \in T$; inoltre: per ogni $n \in \mathbb{N}$, se tutti gli interi $m \leq n$ appartengono a T , anche $n+1$ appartiene a T . Allora è $T = \mathbb{N}$. Dimostrare questa proposizione, o facendo uso delle proprietà di $\mathbb{N}$, o per mezzo della proposizione 5.12.

• 7. Dimostrare per induzione le seguenti relazioni:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (\text{supponendo } a \neq 1).$$

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na} \quad (\text{essendo } 0 < a < 1, n \geq 1).$$

• 9. Sia f la funzione reale così definita $f(x) = ax + b$. Si trovi l'espressione di $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n volte).

• *10. Si consideri la successione $n \mapsto a_n$ (di Fibonacci) così definita: $a_0 = 0, a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Si dimostri che la successione si può così rappresentare: $a_n = Ax^n + By^n$, essendo A, B, x, y numeri reali da determinarsi.

6. I numeri cardinali; gli insiemi finiti

La nozione di *corrispondenza biunivoca* (introdotta nel § 3) sta alla base della nozione di numero: contare significa stabilire una corrispondenza biunivoca tra un insieme di oggetti e un insieme "campione" (ad esempio: l'insieme delle dita di una mano). Risulta molto naturale la seguente definizione:

6.1 DEFINIZIONE *Dati due insiemi, si dice che essi hanno lo stesso numero cardinale se essi possono essere posti in corrispondenza biunivoca.*

Per indicare che due insiemi X e Y hanno lo stesso numero cardinale, scriveremo $c(X) = c(Y)$. Questa relazione gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva.

*6.2 Osservazione. Se tutti gli insiemi che si considerano in una certa teoria matematica sono contenuti in uno stesso insieme E (che fa da "universo"), il simbolo $c(X)$ assume il significato di classe di equivalenza in $\mathcal{F}(E)$ (cioè indica la famiglia di tutti i sottoinsiemi di E che si possono porre in corrispondenza biunivoca con X). Ma, se non si fa una tale convenzione, dal momento che, come sappiamo, non esiste "l'insieme di tutti gli insiemi", l'espressione $c(X) = c(Y)$ deve essere intesa, globalmente, come un predicato binario (relazione, ma non in senso insiemistico) tra X e Y .

Cominciamo ad applicare la definizione 6.1 ai casi più semplici. Preso un $n \in \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme degli interi che precedono n , cioè l'insieme:

$$I_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Gli insiemi I_n si prestano bene come insiemi-campione.

6.3 DEFINIZIONE Si dice che un insieme X è finito se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che X si possa mettere in corrispondenza biunivoca con I_n ; in questo caso si dice che X ha numero cardinale n , e si scrive $c(X) = n$. Se non esiste alcun n per cui questo è possibile, si dice che X è infinito.

Perché l'attribuzione del numero cardinale n all'insieme X sia legittima, occorre dimostrare che, se X è finito, è unico l'intero n tale che X e I_n si possono far corrispondere biunivocamente. Supponiamo, per assurdo, che X si possa mettere in corrispondenza biunivoca sia con I_n che con I_m , con $m \neq n$. Allora è chiaro che I_m e I_n si possono porre in corrispondenza biunivoca fra loro. Ma ciò è escluso dal seguente teorema, che ha portata un po' più generale di quanto qui occorre:

6.4 TEOREMA Per ogni intero $n \geq 1$, l'insieme I_n non può essere posto in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.

Lasciamo allo studioso (se ne ha voglia) la dimostrazione di questo teorema, facendogli presente che sarà utile aver presenti le proprietà degli interi naturali considerate nel paragrafo precedente (in particolare la 2)).

Rimandando al prossimo paragrafo lo studio di qualche insieme infinito e di qualche ulteriore proprietà dei numeri cardinali, dedichiamoci ora allo studio degli insiemi finiti. Il problema fondamentale che vogliamo affrontare è il seguente: dati certi insiemi finiti (anzi: dati semplicemente i loro numeri cardinali) calcolare il numero cardinale di insiemi che si ottengono da essi mediante le operazioni insiemistiche fondamentali.

Cominciamo con alcune proposizioni, che chiameremo "principi" potendo essere considerati come teoremi, oppure come definizioni (della somma, del prodotto e del quoziente), in dipendenza dal modo con cui vengono introdotti gli interi naturali.

6.5 PRINCIPIO DELLA SOMMA Se X e Y sono insiemi finiti disgiunti, si ha:

$$c(X \cup Y) = c(X) + c(Y).$$

6.6 PRINCIPIO DEL PRODOTTO Se X e Y sono insiemi finiti, si ha:

$$c(X \times Y) = c(X) \cdot c(Y).$$

6.7 PRINCIPIO DEL QUOZIENTE Nell'insieme X , sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza tale che tutte le classi di equivalenza abbiano il medesimo numero cardinale r ; allora si ha:

$$c(X) = r \cdot c(X/\mathcal{R}).$$

Notiamo che i termini "insieme-prodotto" e "insieme-quoziente" prendono spunto dalle regolette 6.6 e 6.7.

Ci poniamo ora i seguenti problemi:

a) Dato un insieme B , con $c(B) = n$, e preso un intero $k \leq n$, trovare il numero dei sottoinsiemi di B composti di k elementi.

Indichiamo questo numero con $C_{n,k}$ (essendo chiaro a priori che questo numero dovrà dipendere solo da n e da k). Con terminologia classica, il numero $C_{n,k}$ viene detto "numero delle combinazioni di n elementi, di classe k ".

b) Dati due insiemi A e B , con $c(A) = k$, $c(B) = n$, calcolare il numero $F_{n,k}$ delle applicazioni di A in B .

c) Dati due insiemi A e B , con $c(A) = k$, $c(B) = n$, calcolare il numero $D_{n,k}$ delle applicazioni iniettive di A in B .

$D_{n,k}$ è detto "numero delle disposizioni semplici" di n elementi, di classe k mentre per il numero $F_{n,k}$ si parla di "numero delle disposizioni con ripetizione", di n elementi, e classe k .

Cominciamo con il problema b), che è più semplice. Si potrà procedere per induzione rispetto a k . È evidente, anzitutto, che è $F_{n,1} = n$ (se A consta di un solo elemento, le applicazioni $A \rightarrow B$ sono tante quanti gli elementi di B). Supponiamo ora che A sia costituito di k elementi, con $k > 1$; sia ora a un qualunque elemento di A : ripartiamo le applicazioni $A \rightarrow B$ in classi, mettendo in una stessa classe le applicazioni che coincidono in $A - \{a\}$; dunque, una stessa classe conterrà tanti elementi, quante sono le applicazioni $\{a\} \rightarrow B$ cioè n , mentre il numero delle classi sarà $F_{n,k-1}$. Dunque per il principio 6.7, si ha la relazione:

$$F_{n,k} = F_{n,k-1} \cdot n.$$

Tenendo conto che $F_{n,1} = n$, si ottiene subito

$$F_{n,k} = n^k. \quad [6.1]$$

6.8 Osservazione. Questa formula suggerisce anche la notazione B^A , con cui si indica l'insieme di tutte le applicazioni di A in B (anche nel caso in cui A e B non siano finiti).

Il problema c) si tratta in modo abbastanza simile; notiamo solo che, perché esista un'applicazione iniettiva $A \rightarrow B$, deve essere $n \geq k$, (altrimenti si finirebbe per avere un'applicazione biiettiva di un insieme finito in una sua parte propria, cosa che resta esclusa dal teorema 6.4).

Cominciamo dunque, col notare che, come prima, è $D_{n,1} = n$. Supponiamo ora che A abbia $k > 1$ elementi, e sia a uno di essi. Ripartiamo l'insieme delle applicazioni iniettive $A \rightarrow B$ in classi, mettendo in una stessa classe le applicazioni che coincidono in $A - \{a\}$. Una classe conterrà $n - (k - 1)$ elementi: infatti tanti sono i valori che restano disponibili in B , non potendo un'applicazione iniettiva assumere nel punto a alcuno dei $k - 1$ valori già assunti in $A - \{a\}$. Allora, sempre per il principio 6.7, si ha la formula:

$$D_{n,k} = D_{n,k-1}(n - k + 1).$$

Procedendo per induzione, e tenendo conto che $D_{n,1} = n$ si ottiene il risultato:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1). \quad [6.2]$$

Un caso particolarmente interessante è quello in cui sia $k = n$. Il numero $D_{n,n}$ può essere visto come numero delle applicazioni iniettive di un insieme di n elementi in sé; queste applicazioni sono necessariamente anche surgettive (per la solita ragione che, altrimenti, vi sarebbe un'applicazione biiettiva di un insieme finito in una sua parte propria). Tali applicazioni vengono dette *sostituzioni*. Dunque, il numero delle sostituzioni su un insieme di n elementi è dato dalla formula:

$$D_{n,n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Siamo ora in grado di risolvere il problema a). Consideriamo l'insieme di tutte le applicazioni iniettive di un insieme A di k elementi, in un insieme B di n elementi ($k \leq n$).

Introduciamo nell'insieme di queste applicazioni la seguente relazione di equivalenza. In altre parole, due applicazioni sono

equivalenti se hanno la stessa immagine

$$f \sim g \stackrel{\text{def}}{\iff} f(A) = g(A).$$

Le possibili classi di equivalenza sono tante quanti i sottoinsiemi di B costituiti da k elementi, cioè $C_{n,k}$.

Ogni classe contiene tanti elementi quante sono le applicazioni biiettive di un insieme di k elementi in un altro (di k elementi).

Si può concludere allora:

$$D_{n,k} = k! C_{n,k}.$$

È da notare che questa formula fornisce anche un risultato aritmetico tutt'altro che evidente: il prodotto di k interi consecutivi (vedi la [6.2]) è divisibile per $k!$. Dunque

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}. \quad [6.3]$$

Abbiamo supposto $k > 0$; possiamo porre $C_{n,0} = 1$ (c'è un unico sottoinsieme vuoto!).

I numeri $C_{n,k}$ vengono anche detti coefficienti binomiali, per un'importante proprietà che considereremo fra poco, e vengono indicati anche con il simbolo $\binom{n}{k}$. Moltiplicando numeratore e

denominatore della [6.3] per $(n-k)!$ si ottiene subito l'espressione:

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad [6.4]$$

Notiamo che, avendo posto $0! = 1$, questa relazione vale anche nei casi estremi $k = 0$, $k = n$.

I coefficienti binomiali hanno molte interessanti proprietà. In primo luogo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad [6.5]$$

Questa relazione è evidente dalla [6.4]; d'altra parte, essa può essere dimostrata osservando che, dato un insieme di n elementi, vi è un'ovvia corrispondenza biunivoca tra la famiglia dei sottoinsiemi di k elementi e quella dei sottoinsiemi di $n - k$ elementi: quella che associa ad ogni insieme il suo complementare.

Per $k > 1$ vale inoltre l'eguaglianza:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \quad [6.6]$$

La dimostrazione si può ottenere con semplici calcoli, esprimendo i due termini che compaiono a secondo membro mediante la [6.3] ed eseguendo ovvie semplificazioni. Ma è istruttivo darne anche una dimostrazione di carattere combinatorio.

Secondo la nostra definizione $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ è il numero dei sottoinsiemi di k elementi contenuti in un insieme B di n elementi. Fissato un elemento $a \in B$, i sottoinsiemi di k elementi di B si possono ripartire in due classi: quelli che non contengono a , e quelli che contengono a . I primi sono in numero di $\binom{n-1}{k}$ (perché sono i sottoinsiemi di $B - \{a\}$ costituiti da k elementi); gli altri sono in numero di $\binom{n-1}{k-1}$ (perché sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di $B - \{a\}$ costituiti da $k-1$ elementi: aggiungendo a ciascuno di questi l'elemento a si ottiene uno di quelli). Così risulta, evidentemente, la [6.6].

L'uguaglianza [6.6] permette di calcolare i numeri $\binom{n}{k}$ mediante il noto "triangolo"; questa è una tabella di numeri disposti su righe e colonne; il numero $\binom{n}{k}$ viene scritto all'incrocio della n -esima riga e della k -esima colonna ($k \leq n$).

Si ha $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ e, inoltre, per $0 < k < n$, $\binom{n}{k}$ è somma di due numeri che si trovano nella riga precedente: uno nella stessa colonna e l'altro nella colonna precedente.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
...					

Queste considerazioni si applicano al seguente importante teorema:

6.9 TEOREMA (FORMULA DI NEWTON DELLO SVILUPPO DEL BINOMIO) Siano a e b numeri reali (o, più generale, elementi di un anello commutativo). Allora vale l'uguaglianza:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k; \quad [6.7]$$

(in questa formula si deve intendere: $x^0 = 1$, qualunque sia x).

Dimostrazione. Diamo dapprima una dimostrazione di carattere combinatorio. La potenza $(a+b)^n$ è un prodotto:

$$(a+b) \cdot (a+b) \cdots (a+b) \quad \text{di } n \text{ fattori.}$$

Il suo sviluppo è una somma di monomi tutti di grado n in a e b del tipo $a^{n-k} b^k$, con $0 \leq k \leq n$; il monomio $a^{n-k} b^k$ compare tante volte quanti sono i modi di fissare i k fattori da cui estrarre b (estraendo a dai rimanenti $n-k$): cioè $\binom{n}{k}$ volte. ■

Si osservi che per ridurre i monomi alla forma $a^{n-k} b^k$ si fa uso essenziale della proprietà commutativa del prodotto.

Diamo ora un'altra dimostrazione fondata sul principio di induzione. Per $n=1$ si ha

$$(a+b)^1 = a+b = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k,$$

pertanto la [6.7] vale per $n=1$; sia ora $n > 1$ e supponiamo valida la [6.7] per l'intero $n-1$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^k \right) (a+b) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-1-k} b^{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{n-k} b^k + \sum_{h=1}^n \binom{n-1}{h-1} a^{n-h} b^h, \end{aligned}$$

dove si è posto $k+1=h$ nella seconda sommatoria. Poiché la

somma non dipende dalla lettera usata come indice, poniamo di nuovo k , in luogo di h nella seconda sommatoria; dalla prima sommatoria estraiamo l'addendo corrispondente a $k=0$, dalla seconda l'addendo corrispondente a $k=n$, ottenendo così:

$$(a+b)^n = \binom{n-1}{0} a^n + \binom{n-1}{n-1} b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] a^{n-k} b^k.$$

Tenendo presente che è

$$\binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \quad \binom{n-1}{n-1} = 1 = \binom{n}{0}$$

e applicando la relazione [6.6], si ottiene finalmente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

che è appunto la [6.7]. ■

6.10 Osservazione. Il numero di tutti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi (compresi quello vuoto e quello coincidente con l'insieme stesso) è dato dalla somma:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n. \quad [6.8]$$

C'è un'altra via per trovare questo risultato; dato un sottoinsieme H di un insieme B , possiamo introdurre una funzione φ definita in B assumente i soli valori 0 e 1, in questo modo:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in H \\ 0 & \text{se } x \notin H. \end{cases}$$

Una tale funzione si dice *funzione caratteristica* dell'insieme H . Evidentemente, una funzione assumente solo i valori 0 e 1 è funzione caratteristica di uno e un solo sottoinsieme. Allora $\mathcal{P}(B)$ ha lo stesso numero cardinale dell'insieme di tutte le applicazioni di B in un insieme di due elementi; questo numero cardinale (vedi la [6.1]) è 2^n . Si usa spesso la notazione 2^B per indicare l'insieme $\mathcal{P}(B)$, anche nel caso in cui B sia infinito.

Esercizi

• 1. Dati nel piano n punti, fra cui non vi siano 3 allineati, quante rette essi individuano?

• 2. In una gara a cui partecipano n concorrenti ($n \geq 3$) vengono classificati solo i primi tre arrivati. Quante sono le possibili classifiche?

• 3. Dei numeri di quattro cifre formati con le nove cifre 1, 2, ..., 9 si trovi:

- a) quanti hanno le cifre tutte distinte,
- b) quanti hanno le cifre in ordine crescente,
- c) quanti hanno due cifre pari e due cifre dispari.

4. Quanti sono i numeri di quattro cifre tutte distinte, che non comincino con lo zero?

• 5. In quanti modi otto rematori possono disporsi in un canotto, con la limitazione che i due più deboli non vadano né al primo né all'ultimo posto?

6. Si dimostri, per induzione rispetto a r , che

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_r=n} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_r^{k_r}$$

(la somma va estesa a tutte le r -uple di numeri interi non negativi $k_1, k_2, \dots, k_r$ tali che $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$).

7. In quanti modi si possono ordinare (linearmente) n oggetti, di cui m_1 sono uguali fra loro, m_2 uguali fra loro (e diversi dai precedenti), ..., m_r uguali fra loro (e diversi da tutti i precedenti)? ($m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$.)

8. Quante sono le soluzioni (in interi non negativi) dell'equazione:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n,$$

essendo n un intero assegnato?

• 9. In quanti modi diversi si possono disporre n persone attorno a un tavolo rotondo? (Si pensa che due disposizioni coincidono se ciascuno dei presenti ha le stesse due persone accanto.)

7. Gli insiemi infiniti; ulteriori proprietà dei numeri cardinali

Riprendiamo lo studio dei numeri cardinali, occupandoci in particolare di quelli infiniti. Un insieme-campione di grande importanza è l'insieme N degli interi naturali.