TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera
a.a. 2009/10

VERSIONE RIDOTTA

Lezione **XXXII**

★ Il teorema della varietà quoziente

Schema generale

★ G gruppo di Lie agente in modo liscio su M, varietà diff.

si chiede che l'azione θ sia libera e propria

Enunciato:

libera: $g \cdot p = p \Rightarrow g = e$, $G_p = \{e\}$

propria: $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$ propria, eq. a dire:

$g_i p_i \to q$, $p_i \to p$ $\Rightarrow \exists \{g_i\}$ s.s. $g_i \to g$ e $q = g \cdot p$

$\boxed{M/G \quad \text{sp. delle } G\text{-orbite}}$

$$\mathcal{O}_p = \{ g \cdot p \;/\; p \in M \text{ fissato}, \; g \in G \}$$

G-orbita di p

è una varietà topologica

$$\dim M/G = \dim M - \dim G$$

e possiede un'unica struttura di varietà liscia tale che $\pi : M \to M/G$ (proiezione canonica : $p \mapsto \mathcal{O}_p$) che è aperta sia una sommersione (liscia)

- M/G a base numerabile : facile
- M/G Hausdorff: si usa θ propria : la proprietà serve a provare che $\mathcal{O} = \{(x, y) \;/\; x \sim y\}$ ($\sim$: essere nella stessa orbita) è chiusa.

$$(g_i p_i, p_i) \to (q, p) \quad \text{data } g_i \to g, \text{ è}$$
$$(g_j p_j, p_j) \to (g \cdot p, p) \in \mathcal{O}$$

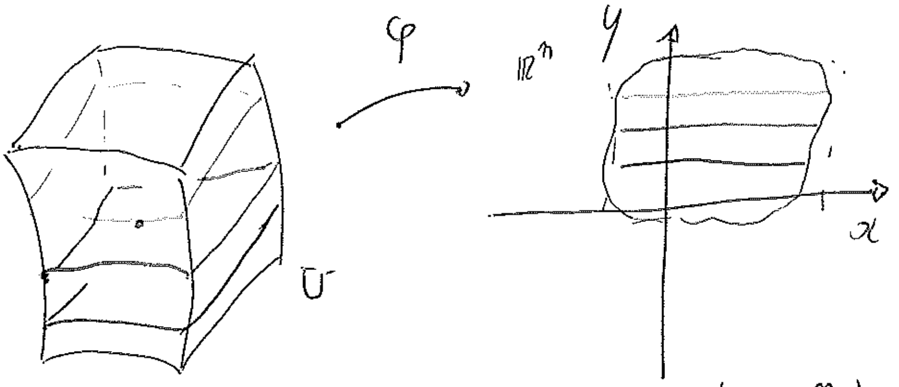
- M/G localmente euclideo:

Le G-orbite sono "embedded"

$\theta^{(p)} : G \to M$, $g \mapsto g \cdot p$ è iniettiva (θ è libera), è G-equivariante $\Rightarrow$ ha rango costante $\Rightarrow$ è un'immersione. In più è propria, e dunque un embedding (e ha immagine chiusa)

Si costruiscono allora carte adattate alla G-azione

$k+n=m=\dim M$



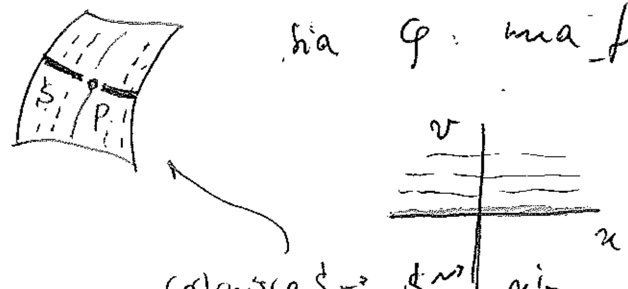
$(x,y)=(x^1\dots x^k,\ y^1\dots y^n)$

(i) $\varphi(\bar U)=U_1\times\bar U_2\subset\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n$

(ii) ogni G-orbita interseca $\varphi(\bar U)$ o in $\emptyset$ o in una <u>singola</u> <u>fetta</u> $\quad y^i=c^i$

$\forall p\ \exists$ una carta siffatta

Sia φ: una <u>fetta</u> per $G\cdot p$



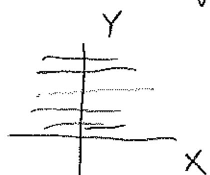
costruisco $S\to S\sim x^i=0$

(è embedded)

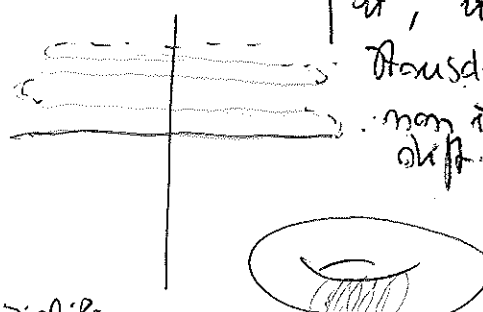
localmente diviene una fetta anche per le altre orbite

Di fatto, restringendo il dominio opportunamente

! si può far sì che ogni G-orbita intersechi S <u>in al più un punto</u>



potrebbe succedere questo



ma non accade perchè l'azione è <u>libera</u> e <u>propria</u>

Queste carte def. una struttura differenziabile, che risulta unica.

Si consideri $H=\gamma(\mathbb{R})$ della foliazione di Kronecker e $G=\mathbb{T}^2\times\mathbb{T}^2$. H non è chiuso in G, G/H non è Hausdorff, in part. non è una varietà diff. Per descrivere spazi di questo tipo si deve ricorrere alla teoria delle C^*-algebre, e si entra nel regno della <u>geometria noncommutativa</u>

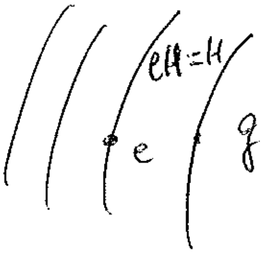
Spazi omogenei homogeneous spaces

G : gruppo di Lie

H : s. gruppo di Lie chiuso
subgroup closed

$$G/H = \{ gH \}_{g \in G}$$

$[g]$ ← Classi laterali sinistre
left coset



$\exists !$ struttura di varietà liscia tale che $\pi : G \to G/H$ sia una sommersione liscia

l'azione sinistra di G su G/H
left action

$$g_1 (g_2 H) := (g_1 g_2) H$$

lo rende uno spazio G-omogeneo
makes it
renders it
transitive

Dim. Consideriamo l'azione a destra di H su G

$g \mapsto g \cdot h$. g_1 e g_2 appartengono alla stessa H-orbita $\iff$ $g_2 = g_1 \cdot h$ per qualche $h \in H$, i.e. iff $[g_1] = [g_2]$. Pertanto

G/H = { classi laterali sinistre } =

= { spazio delle orbite relativo all'azione destra di H su G }

Ora, H agisce in modo liscio (chiaro) e libero

su G : $\quad gh = g \iff h = e$.

Verifichiamo che l'azione è anche propria

Sia $\{g_i\}$ convergente : $g_i \to g$

sia $\{h_i\}$ tale che $\quad g_i h_i \to l$

È subito $\quad h_i = g_i^{-1}(g_i h_i) \to g^{-1} l$

e, dato che H è chiuso, è $\quad g^{-1} l = h \in H$.

$(\Rightarrow \quad l = g \cdot h)$

Possiamo dunque applicare il teorema della varietà quoziente. Per concludere basta mostrare che l'azione di G su G/H è ben def., liscia e transitiva indotta dalla moltiplicazione su G

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\theta"'] & G/H \end{tikzcd}$$

($\pi \circ m$ è costante sulle fibre di $\mathrm{id}_G \times \pi$)

$(g, g_1 H) \mapsto g(g_1 H) = (g g_1) H$

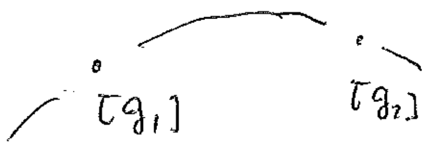
$(g, [g_1]) = [g g_1]$ non dipende da g_1 rappresentante di $[g_1]$

Inoltre è transitiva.

Siano $[g_1]$, $[g_2] \in G/H$

posto $g = g_2 \cdot g_1^{-1}$, è

$$g[g_1] = [g \cdot g_1] = [g_2 g_1^{-1} \cdot g_1] = [g_2]$$



Di fatto, i G/H sono i modelli di tutti gli spazi G-omogenei:

Sia M un G-spazio. Sia $p \in M$. G_p (isotropia) è un sottogruppo di Lie chiuso, incluso in G
embedded

Dim. $\Theta^{(p)} : G \longrightarrow M$, $g \longmapsto g \cdot p$ applicazione orbitale
orbit map

$G_p = \Theta^{(p)^{-1}}(p)$. $\Theta^{(p)}$ è G-equivariante

rispetto all'azione (sinistra) di G su se stesso e G su M:

$$\Theta^{(p)}(\tilde{g} \cdot g) = \tilde{g} \cdot g\, p = \tilde{g} \cdot \Theta^{(p)}(g)$$

azione di G su se stesso (via $\tilde{g}$)

azione di G su M (via $\tilde{g}$)

Si applica il teorema del rango equivariante:

G_p è una sottovarietà embedded $\Rightarrow$ è gruppo di Lie chiuso

[In molti esempi, la chiusura di G_p si accerta facilmente]

★ Caratterizzazione degli spazi omogenei

$$M,\ G\text{-omogenea} \qquad M \underset{G\text{-equiv. diffeomorfa}}{\simeq} G/G_p$$

ossia

$$F : G/G_p \longrightarrow M$$

$$F([g]) := g \cdot p$$

è un diffeomorfismo G-equivariante

Dettagli. Poniamo $H = G_p$.

F è ben definita. Se $[g_1] = [g_2]$ è

$$g_1 p = g_2 \underset{\substack{\cap \\ H = G_p}}{h} \cdot p = g_2 \cdot p \qquad \checkmark$$

G-equivarianza:

$$F(\hat{g}[g]) = F([\hat{g}g]) = \hat{g}\, g \cdot p$$

$$= \hat{g} \cdot F(p)$$

è liscia perché ottenuta da $\Theta^{(p)} : g \longmapsto g \cdot p$ per passaggio a quoziente

È bigettiva:

Sia $q \in M$. $\exists\, g \in G$ t.che $g \cdot p = q$ (transitività) quindi $F[g] = q$. (suriettività)

inoltre se $F[g_1] = F[g_2]$ è

$$g_1 p = g_2 p \Rightarrow \underbrace{g_2^{-1} g_1}_{\in H} p = p$$

$$g_2^{-1} g_1 = h \in H \Rightarrow [g_1] = [g_2].$$ (iniettività)

F ha rango costante, per equivarianza e, essendo bigettiva, è un diffeomorfismo.

** Nota $\pi : M \xrightarrow{G} M/G$

è un fibrato principale

spazio totale M

base M/G

fibra G