Algebra esterna (o di Grassmann)

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Prof. M. Spera
a.a. 2009/10
Lezione IV
Lecture

Sia $\Lambda(V_n^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V_n^*)$

$\Lambda(V_n^*) \equiv \Lambda$

somma diretta ; k-forme

(è uno spazio vettoriale)

Estendiamo per distributività il prodotto esterno $\wedge$

$(\Lambda, \underbrace{+,\cdot}_{\text{sp. vettoriale}}, \wedge)$ (Λ, strutturato con $+$, $\cdot$ e $\wedge$)

viene detta algebra esterna, o di Grassmann, di V^* (elementi: forme su V; gli elementi di Λ^k sono le k-forme o forme di grado k

☆ La dimensione di $\Lambda(V^*)$ vale 2^n

[$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$; ciò segue subito da

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ponendo $a = b = 1$]

Richiamo / Aside

U, W spazi vettoriali $U \oplus W = \{(u,w) \mid u \in U, w \in W\}$

$(u_1, w_1) + (u_2, w_2) := (u_1 + u_2, w_1 + w_2)$

$\alpha \cdot (u,w) = (\alpha u, \alpha w)$

$U \cong \{(u,0)\} \leq U \oplus W$

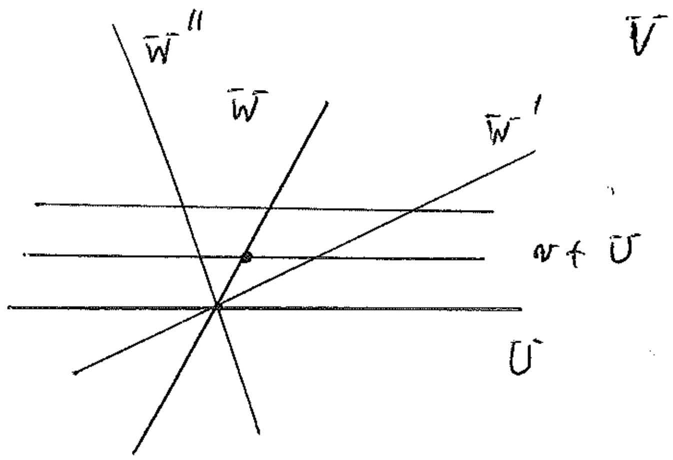
$W \cong \{(0,w)\} \leq U \oplus W$

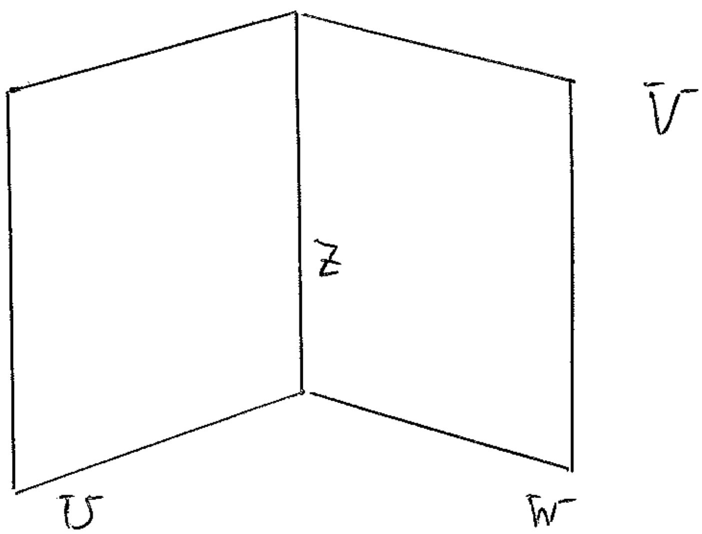
Dato V e $U \leq V$, $W \leq V$

$V = U + W$ se ogni $v = u + w$, per certi u e w.

$V = U \oplus W$ se u e w sono unici, equiv: $U \cap W = \{0\}$

(U e W in somma diretta)





$Z = U \cap \overline{W}$

$\overline{V} = U + \overline{W}$

ma la somma non è diretta

★ Importantissimo per il seguito (omologia e coomologia)

Dato

$U \leq V$ $\qquad$ V/U $\quad$ sp. vettoriale quoziente

$$\left\{ [v] = v + U \right\}$$

$\alpha \circ [v] = [\alpha v]$

$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2]$

(varietà lineari) $\quad$ sottospazi affini di giacitura U ("direction", "position")

Si ha: $\quad V/U \cong \overline{W}$ ← complemento diretto qualsiasi

(i.e. $\overline{W}$ t.c. $U \oplus \overline{W} = \overline{V}$

★ Campi vettoriali e forme differenziali in $\mathbb{R}^n$

Sia $p \in \mathbb{R}^n$. Con $T_p\mathbb{R}^n$ indichiamo una copia di $\mathbb{R}^n$, pensando i suoi elementi come vettori "applicati" (applied) in p; $T_p\mathbb{R}^n$ è detto **spazio tangente** (tangent space) a $\mathbb{R}^n$ in p (at p).

[in seguito daremo una definizione più formale]

$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

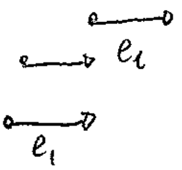
$$\underline{X} = X(p) := \sum_{i=1}^{n} X_i(p)\, e_i$$

$e_i \equiv (e_i)_p$ traslato in p ; base canonica

: campo vettoriale

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$X_i = X_i(p)$ f. lisce



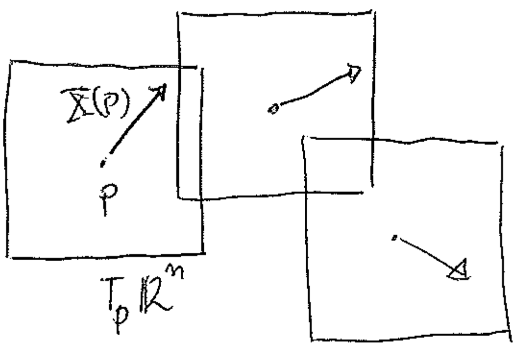
per fissare le idee

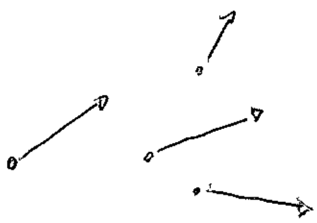
unione disgiunta — disjoint union

$$T\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n$$

è detto **fibrato tangente** (tangent bundle)

[Un campo vettoriale (vector field) è una "sezione" (section) del fibrato tangente]





★ Ora, punto cruciale, pensiamo i vettori tangenti come derivate direzionali

$$\underline{X}(p) \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i(p) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p}_{}$$

∂_i ||| $\frac{\partial}{\partial x_i}$

abuso di notazione

↑ derivata parziale i-esima

///

directional derivative

derivata direzionale (applicata ad una generica funzione liscia) lungo la direzione individuata da $\underline{X}(p) = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

[Si ricordi, dall'Analisi $\dfrac{\partial f}{\partial v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$]

$\cdot x$ ——— $x + tv$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\, f(x+tv)}{dt}\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{(der. delle funzioni composte)}$$

$$\boxed{v \longleftrightarrow v \cdot \nabla}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Sia $p \in \mathbb{R}^n$. Con $T_p^* \mathbb{R}^n$ indichiamo

una copia di $(\mathbb{R}^n)^*$, pensando i suoi elementi
duale

come covettori (i.e. vettori duali) "applicati" in p;
1-forme

$T_p^* \mathbb{R}^n$ è detto spazio cotangente a $\mathbb{R}^n$ in p
cotangent space

differential 1-form

1-forma differenziale $\equiv$ $(e_i^*)_p$ traslato in p $\quad \omega : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$

$$\omega = \omega(p) := \sum_{i=1}^{n} \omega_i(p) e_i^* \qquad \omega = (\omega_1 \dots \omega_n)$$

base canonica duale

$\omega_i = \omega_i(p)$: funzioni lisce

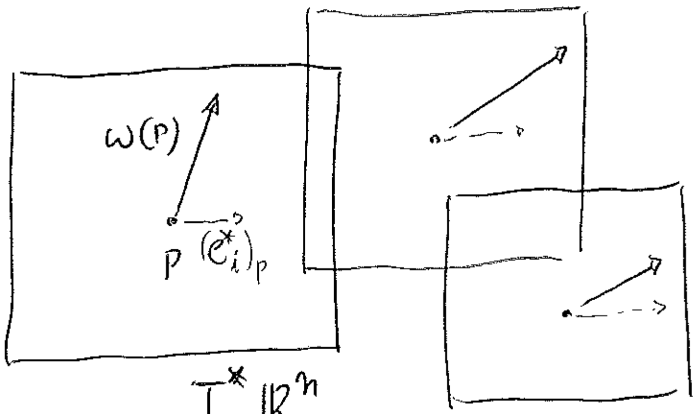
unione disgiunta $\quad$ disjoint union

$T^* \mathbb{R}^n = \bigsqcup_{p \in \mathbb{R}^n} T_p^* \mathbb{R}^n$ è detto

fibrato cotangente
cotangent bundle

$\parallel\!\!\mid$

$\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$



$T_p^* \mathbb{R}^n$

Ora, l'interpretazione dei vettori tangenti come derivate direzionali conduce all'interpretazione di $((e_1^*)_p \ldots (e_n^*)_p)$ come differenziali (calcolati in p) $((dx_i)_p)$ delle funzioni coordinate $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$!

leads — interpretation — differentials — coordinate functions

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \qquad (dx_i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \delta_{ij}$$

$$\equiv$$

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p)$$

la funzione

$$\mathbb{R}^n \ni p \longmapsto \omega(X) = \left(\sum a_i(p)\, dx_i\right)\left(\sum_j b_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$\omega = \sum a_i dx_i \qquad X = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i,j} a_i(p)\, b_j(p) \underbrace{\left[dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right]}_{=\delta_{ij}}(p)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i(p)\, b_i(p) \quad \text{è liscia}$$

D'ora in poi $e_j^* \rightsquigarrow dx_j$

From now on

$$\Lambda^k_p(\mathbb{R}^n) = \{ k\text{-forme su } T_p\mathbb{R}^n \}$$

$$\left(\dim = \binom{n}{k} \right)$$

Base: $\left\{ dx_{i_1}\big|_p \wedge dx_{i_2}\big|_p \wedge \ldots dx_{i_k}\big|_p \right\}$ $i_1 < i_2 < \ldots i_k$

basis

$i_j \in \{1, 2, \ldots k\}$

$$\cong$$

$$\left\{ (dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k})\big|_p \right\}$$

$$\cong$$

$$\left\{ dx_I\big|_p \right\}$$

⚠ $I = (i_1, i_2 \ldots i_k)$

multiindice

multi-index

k-forme differenziali : $\omega : \mathbb{R}^n \ni p \longmapsto \sum_I \omega_I(p)\, dx_I$

differential k-forms

$$\cong$$

$$\sum_I \omega_I(p)\, dx_I\big|_p$$

$$= \sum \underbrace{\omega_{i_1 \ldots i_k}}_{\text{f. lisce}}(p)\, (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots dx_{i_k})\big|_p$$

$$\equiv \sum \omega_{i_1 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots dx_{i_k}$$

forma contratta

abridged notation

$\ast$ Proprietà delle k-forme (in parte rivisitate...)
revisited

$$\omega_1 = \sum a_I \, dx_I \qquad \omega_2 = \sum b_I \, dx_I \qquad r\text{-forme}$$

$$\alpha \omega_1 + \beta \omega_2 = \sum (\alpha a_I + \beta b_I) \, dx_I$$

$$\left[\underset{\sum_I a_I dx_I}{\overset{k\text{-forma}}{\omega_1}} \wedge \underset{\sum b_J dx_J}{\overset{l\text{-forma}}{\omega_2}} := \sum_{I,J} a_I b_J \, dx_I \wedge dx_J \right]$$

$$\text{(a)} \quad (\overset{k}{\omega} \wedge \overset{s}{\varphi}) \wedge \overset{r}{\theta} = \omega \wedge (\varphi \wedge \theta)$$

$$\sum a_I dx_I \quad \sum b_J dx_J \quad \sum c_K dx_K$$

$$\left(\sum a_I b_J \, dx_I \wedge dx_J \right) \left(\sum c_K dx_K \right) = \sum a_I b_J c_K \, dx_I \wedge dx_J \wedge dx_K \qquad \checkmark$$

$$r = s$$

$$\text{(b)} \quad \omega \wedge (\varphi + \theta) = \omega \wedge \varphi + \omega \wedge \theta \qquad \checkmark$$

(c)

$$(\overset{k}{\omega} \wedge \overset{s}{\varphi}) = (-1)^{ks} (\overset{k}{\varphi} \wedge \overset{s}{\omega})$$

$$\| $$

$$\sum a_I b_J \, dx_{i_1} - dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} - dx_{j_s}$$

$$= - \sum a_I b_J \, dx_{i_1} - dx_{i_{k-1}} \, dx_{j_1} \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} - dx_{j_s}$$

$$\Rightarrow \underbrace{k + k + \ldots k}_{s} = ks \text{ camb. di segno} \Rightarrow (-1)^{ks}$$

⚠ In generale $\omega \wedge \omega \neq 0$ [$\omega \wedge \omega = 0$ (k-forma) se k è dispari.

Ex: $\omega =$

$$(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) =$$

$$= dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

$$= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (\quad)$$

$$= 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$