

Matematica – Esercizi di ricapitolazione n. 1

Numeri reali - Geometria affine - Funzioni di una variabile reale - Limiti - Derivazione - Studio di funzione

Università di Verona - Laurea in Biotecnologie - A.A. 2012/13

Martedì 4 dicembre 2012

- (1) **Retta reale.** Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; dire se sono superiormente/inferiormente limitati; calcolarne sup, inf, max, min; dire quali sono i loro punti di accumulazione in $\mathbb{R}$; dire di quali loro punti essi sono intorni.

$$A_1 =]-1, 1[\cup \{1 + \frac{3}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}; \quad A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 - 4n - 1 > 0\} \cap \mathbb{Q}_{\leq 3};$$

$$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : \log(|x+1| - 1) \leq 1\} \cup \mathbb{R}_{>2}; \quad A_4 = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{tg} \frac{1}{x+1} = 0\} \cup [\frac{1}{2}, 3[.$$

- (2) **Geometria affine bi- e tridimensionale.**

- (a) Trovare le forme parametrica e cartesiana della retta r passante per $P_{\vec{a}} = (1, 0)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (-1, 3)$, della retta s passante per $Q_{\vec{b}} = (-1, -1)$ e ortogonale al vettore $\vec{w} = (2, -1)$ e della retta t passante per P e Q . Calcolare le coordinate del punto $R_{\vec{c}} = r \cap s$, e la distanza di R dalla retta t .
- (b) Nello spazio cartesiano si disegnano i tre punti $P_{\vec{a}} = (1, 0, -2)$, $Q_{\vec{b}} = (-2, -1, 1)$ e $R_{\vec{c}} = (3, 1, 0)$, ed i due vettori $\vec{v} = (-1, 3, 0)$ e $\vec{w} = (1, 1, 2)$. Calcolare e disegnare $\vec{v} \wedge \vec{w}$. Determinare l'area del parallelogramma individuato da $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ed il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{w}$ e $\vec{a} + \vec{b}$. Trovare le forme parametrica e cartesiana del piano Π passante per P e parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$; del piano Π' passante per Q e ortogonale a $\vec{w}$; del piano Π'' passante per P , Q e R ; del piano Π''' passante per Q e R e parallelo a $\vec{u} + 2\vec{w}$; della retta r passante per R e parallela a $2\vec{w} - \vec{v}$; e la distanza di Q da Π . Trovare infine la proiezione del vettore $\vec{v} + \vec{w}$ lungo il vettore $\vec{u}$.

- (3) **Funzioni di una variabile reale.**

- (a) Dire se $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ è iniettiva e se è suriettiva, e calcolare (eventualmente, restringendo e corestringendo opportunamente dominio e condominio) la funzione inversa. Dire se f è superiormente e/o inferiormente limitata. Calcolare l'antimmagine $f^{-1}(]-2, 2])$.
- (b) Stesse domande per $g(x) = e^{\frac{x}{x^2-2}}$.

- (4) **Limiti e continuità.**

(a) Calcolare i seguenti limiti nei casi $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$. (Facoltativo: discutere $\alpha \in \mathbb{R}$.)

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + x^\alpha}, & \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{\frac{\alpha}{x+1}} \log |x|, & \text{(c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctg(x^\alpha) + \alpha), \\ \text{(d)} \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\alpha x} - 3x}{|x|^\alpha - 1}, & \text{(e)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} (x^{2\alpha} - 1) \log |x + 1|, & \text{(f)} \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1 + \cos x}, \\ \text{(g)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{10 - x^2} - 1}{\sin(\pi(x + \alpha))}, & \text{(h)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cotg(\alpha x)}{\log 2x}, & \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \cos x - 3\sqrt[3]{1 + x} + x}{x^\alpha}. \end{aligned}$$

(b) Si consideri la funzione $h_{\alpha, \beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$h_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \alpha x - 1 & (\text{se } x < -1) \\ x^2 - 4 & (\text{se } -1 \leq x < 3) \\ \frac{x^\beta - 4x}{x^2 - 6} & (\text{se } x \geq 3) \end{cases}.$$

Si dica:

- (i) per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la funzione $h_{\alpha, \beta}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$;
- (ii) per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} h_{\alpha, \beta}(x) = -1$;
- (iii) per quali $\beta \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_{\alpha, \beta}(x) \in \mathbb{R}$.

(5) Derivazione.

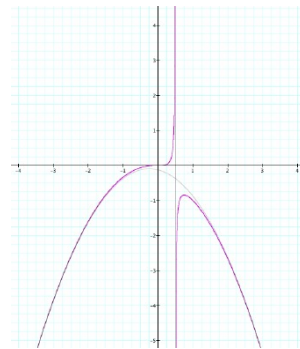
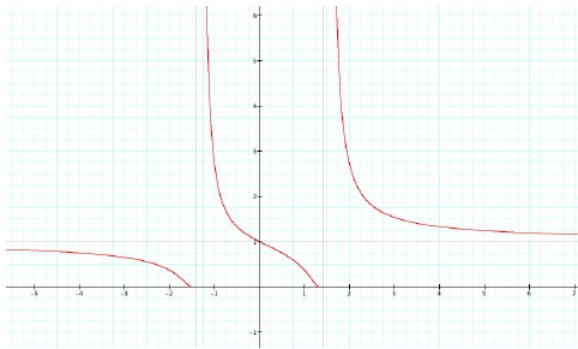
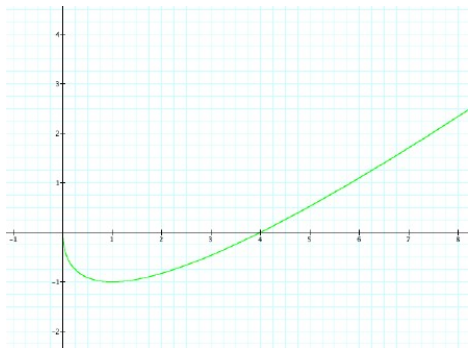
- (a) Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3}{1 - 2x}$ e disegnarne il grafico (determinando se possibile anche la parabola asintoto di f a $\pm\infty$.) Dire in quali punti del dominio la retta tangente al grafico ha pendenza -1 , e in quali altri la retta tangente al grafico passa per il punto $(2, 0)$. Calcolare infine l'equazione cartesiana di tali rette.
- (b) Sia $f(x) = \sqrt{|\cos x| - x}$. Dire qual'è il dominio di f , e in quali punti del dominio essa è derivabile; calcolare la derivata in tali punti.
- (c) Tra tutti i coni retti a base circolare con assegnata superficie laterale S , determinare il raggio di base di quello avente il volume massimo.
- (d) Per quale $\alpha > 0$ l'area della regione di piano racchiusa tra le spezzate $y = \alpha^2(|x| - 1)$ e $y = \frac{1}{\alpha}(1 - |x|)$ (che, si noti, si incontrano sempre nei punti $(\pm 1, 0)$) è minima?
- (e) Studiare gli estremi locali di $f(x) = |x + 3| - 4 \arctg x$ e $g(x) = \log |2 \cos x + 1| + x$.
- (f) Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$, e determinarne i punti più vicini alla retta $x - 3y + 5 = 0$. Stessa domanda per il tratto del grafico di $g(x) = \cos x$ con $|x| \leq \pi$.

(6) **Studio di funzione.** Si studi l'andamento delle seguenti funzioni e se ne tracci il grafico.

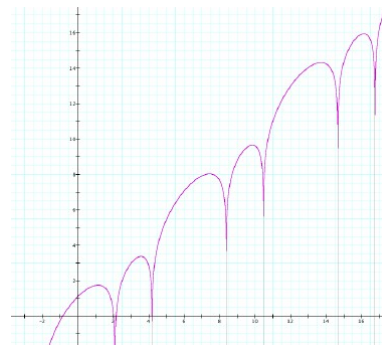
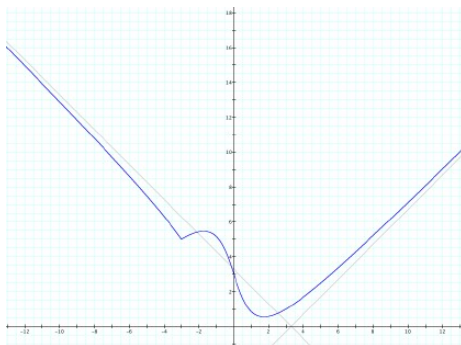
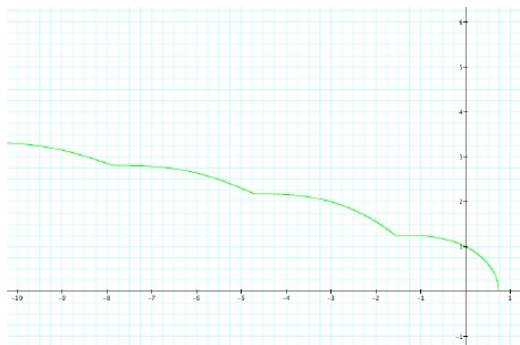
$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = |x - 1|e^x, & \text{(b)} \quad & f(x) = \arctg \frac{x^2 - x}{|x| - 2}, & \text{(c)} \quad & f(x) = \sin 2x - 2 \cos x, \\ \text{(d)} \quad & f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} - 1, & \text{(e)} \quad & f(x) = \log(\sqrt{|x + 2|} - x) + 1, & \text{(f)} \quad & f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x - 2}}. \end{aligned}$$

Risultati.

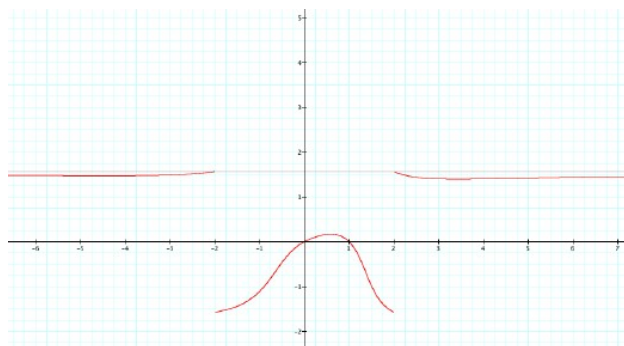
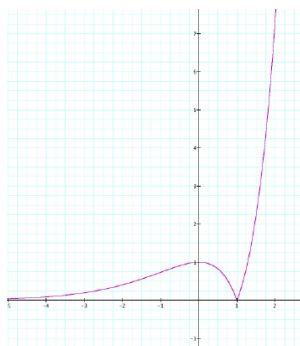
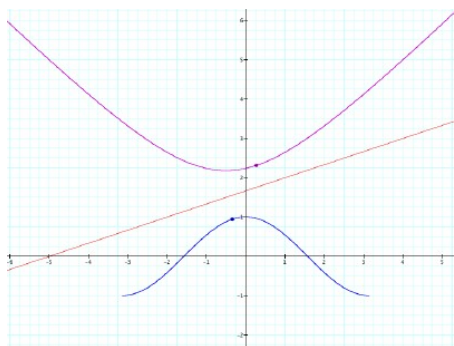
- (1) • A_1 è limitato; $\max = 4$, $\inf = -1$; accumulazioni sono i punti di $[-1, 1]$; è intorno dei punti di $] -1, 1[$.
 • $A_2 = \mathbb{Z}_{\leq -1}$, dunque è superiormente limitato; $\max = -1$; accumulazione è $-\infty$; è intorno di nessun punto.
 • $A_3 = \mathbb{R}_{\geq -e-2}$, dunque è inferiormente limitato; $\min = -e - 2$; accumulazioni sono tutti i suoi punti e $+\infty$; è intorno di $+\infty$ e di tutti i suoi punti tranne $-e - 2$.
 • A_4 è limitato; $\sup = 3$, $\min = -1 - \frac{1}{\pi}$; accumulazioni sono -1 e i punti di $[\frac{1}{2}, 3]$; è intorno dei punti di $]\frac{1}{2}, 3[$.
- (2) • $r = \{(1 - \alpha, 3\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : 3x + y - 3 = 0\}$; $s = \{(-1 + \alpha, -1 + 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : 2x - y + 1 = 0\}$;
 $t = \{(1 + 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x - 2y - 1 = 0\}$; $R(\frac{2}{5}, \frac{9}{5})$; $\text{dist}_t(R) = \frac{21}{25}\sqrt{5}$.
 • $\vec{v} \wedge \vec{w} = 2(3, 1, -2)$; area $2\sqrt{14}$, volume 1; $\Pi = \{(1 - \alpha + \beta, 3\alpha + \beta, -2 + 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 3x + y - 2z - 7 = 0\}$;
 $\Pi' = \{(-2 + \alpha + 2\beta, -1 - \alpha, 1 - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x + y + 2z + 1 = 0\}$;
 $\Pi'' = \{(1 + 3\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, -2 - 3\alpha + 2\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 5x - 12y + z - 3 = 0\}$;
 $\Pi''' = \{(-2 + 2\alpha + 5\beta, -1 + 3\alpha + 2\beta, 1 + 3\alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : 9x - 17y + 11z - 10 = 0\}$;
 $r = \{(3 + 3\alpha, 1 - \alpha, 4\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : x + 3y - 6 = 0, 4y + z - 4 = 0\}$;
 $\text{dist}_{\Pi}(Q) = \frac{8}{7}\sqrt{14}$; $p_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}$.
- (3) I risultati si comprendono meglio osservando le Figure 1 e 2.
 • Il dominio di f è $A = [0, +\infty[$. Preso $y \in \mathbb{R}$, la fibra $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$ è vuota se $y < -1$, è formata dal solo punto $\{x = 1\}$ se $y = -1$, dai due punti distinti $\{x_1 = (1 - \sqrt{y+1})^2, x_2 = (1 + \sqrt{y+1})^2\}$ se $-1 < y \leq 0$ e dal solo punto $\{x = (1 + \sqrt{y+1})^2\}$ se $y > 0$: dunque f non è né iniettiva né suriettiva, ed ha immagine $B = f(A) = [-1, +\infty[$. Ad esempio, restringendo il dominio di f a $A' = [1, +\infty[$ ed il codominio a B , la funzione $f : A' \rightarrow B$ diventa biiettiva, con inversa $f^{-1} : B \rightarrow A'$ data da $x = f^{-1}(y) = (1 + \sqrt{y+1})^2$. La funzione è inferiormente limitata con minimo -1 . Vale $f^{-1}(]-2, 2]) = [0, 2(2 + \sqrt{3})]$.
 • Il dominio di g è $A = \mathbb{R} \setminus \{\mp\sqrt{2}\}$. Preso $y \in \mathbb{R}$, la fibra $g^{-1}(y) = \{x \in A : g(x) = y\}$ è vuota se $y \leq 0$, è formata dal solo punto $\{0\}$ se $y = 1$, e dai due punti distinti $\{x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8 \log^2 y}}{2 \log y}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \log^2 y}}{2 \log y}\}$ se $y > 0$ con $y \neq 1$: dunque g non è né iniettiva né suriettiva, ed ha immagine $B = f(A) =]0, +\infty[$. Se $y > 1$ si ha $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$; poiché ad esempio per $y = e$ si ottiene $x_2 = 2$ e per $y = e^2$ si ottiene $x_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{4} \sim 1,7 < 2$, restringendo il dominio di g a $A' = [\frac{1 + \sqrt{33}}{4}, 2]$ e il codominio a $B' = [e, e^2]$, la funzione $g : A' \rightarrow B'$ diventa biiettiva con inversa $g^{-1} : B' \rightarrow A'$ data da $x = g^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{1 + 8 \log^2 y}}{2 \log y}$. Anche g è inferiormente limitata con estremo inferiore (non minimo) 0 . Vale $g^{-1}(]-2, 2]) = [-\infty, -\sqrt{2}[\cup [\frac{1 - \sqrt{1 + 8 \log^2 2}}{2 \log 2}, \sqrt{2}[\cup [\frac{1 + \sqrt{1 + 8 \log^2 2}}{2 \log 2}, +\infty[$.
- (4) Ecco le risposte già nel caso di α qualsiasi, che comprendono in particolare i casi $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.
 • (a) Per $\alpha < \frac{1}{2}$ il limite vale -3 . Per $\alpha = \frac{1}{2}$ vale $-\frac{3}{2}$. Per $\alpha > \frac{1}{2}$ vale 0^- .
 • (b) Per $\alpha \leq 0$ il limite vale 0^- . Per $\alpha > 0$ vale $-\infty$.
 • (c) Per $\alpha < 0$ il limite vale $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Per $\alpha = 0$ vale $\frac{\pi}{4}$. Per $\alpha > 0$ vale α .
 • (d) Per $\alpha < 1$ il limite vale $+\infty$. Per $\alpha = 1$ vale 3 . Per $\alpha > 1$ vale 0^+ .
 • (e) Per $\alpha < 0$ il $\lim_{x \rightarrow -1^+}$ vale $0^{\pm}$. Per $\alpha = 0$ la funzione è nulla. Per $\alpha > 0$ il $\lim_{x \rightarrow -1^+}$ vale $0^{\mp}$.
 • (f) Per $\alpha \notin \mathbb{Z}$ il limite vale $+\infty$. Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ vale $2\alpha^2$.
 • (g) Per $\alpha \notin \mathbb{Z}$ il limite vale 0 . Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ vale $(-1)^{\alpha} \frac{3}{\pi}$.
 • (h) La funzione esiste solo per $\alpha \neq 0$, e il limite vale $-(\text{sign } \alpha)\infty$.
 • (i) Per $\alpha < 2$ il limite vale 0^- . Per $\alpha = 2$ vale $-\frac{1}{6}$. Per $\alpha > 2$ vale $-\infty$.
- (5) • (a) (Vedi Figura 3) La parabola asintotica è $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$. Pendenza -1 solo in $c = 1$, e passante per il punto $(2, 0)$ in $c = 0, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$. Le tangenti si calcolano con la formula $y - f(c) = f'(c)(x - c)$.
 • (b) (Vedi Figura 4) Il confronto grafico dice che esiste un solo $c \in]0, 1[$ tale che $|\cos c| = c$, e il dominio è $] -\infty, c]$; la funzione è ivi continua, e derivabile ovunque tranne che in c e in $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$. La derivata è $\frac{-(\text{sign } \cos x) \sin x - 1}{2\sqrt{|\cos x| - x}}$: si noti che è sempre ≤ 0 , dunque f è sempre decrescente.
 • (c) Il raggio di base per cui il volume è massimo è $\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.
 • (d) L'area è minima per $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.
 • (e) (Vedi Figure 5 e 6) $f(x)$ ha due punti di minimo locale in $x = -3$ (singolare, perché angoloso) e $x = \sqrt{3}$, e un punto di massimo locale in $x = -\sqrt{3}$. $g(x)$ ha infiniti punti di massimo locale nei punti $x = -\arccos(\frac{-1 - \sqrt{7}}{4}) + 2k\pi$ e $x = \arccos(\frac{-1 + \sqrt{7}}{4}) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
 • (f) (Vedi Figura 7) Il punto di minima distanza del grafico di $f(x)$ è quello con $x = \frac{-4 + \sqrt{38}}{8} \sim 0,27$. Il punto di minima distanza del grafico di $g(x)$ con $|x| \leq \pi$ è quello con $x = -\arcsin \frac{1}{3} \sim -0,34$.
- (6) I grafici delle sei funzioni proposte sono riportati nelle Figure 8-9-10-11-12-13.



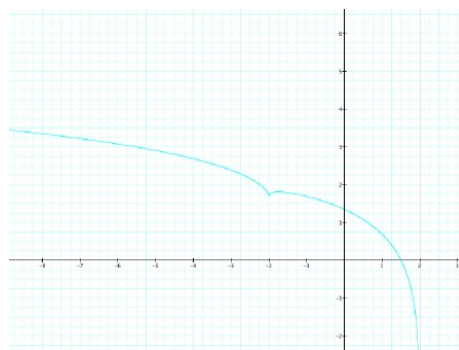
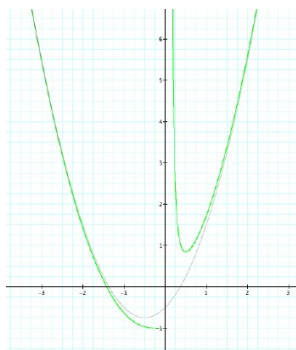
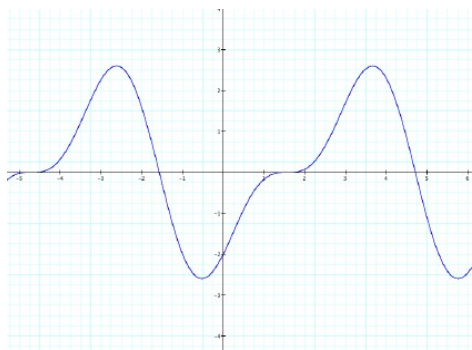
(1) Grafico di $x - 2\sqrt{x}$; (2) Grafico di $\frac{x}{x^2-2}$; (3) Grafico di $\frac{x^3}{1-2x}$.



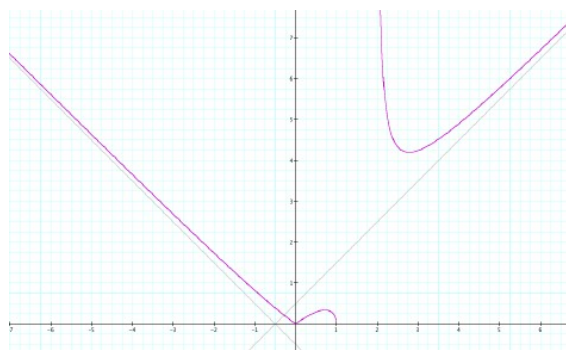
(4) Grafico di $\sqrt{|\cos x| - x}$; (5) Grafico di $|x+3| - 4 \operatorname{arctg} x$; (6) Grafico di $\log |2 \cos x + 1| + x$.



(7) Grafici di $\sqrt{x^2 + x + 5}$ e $\cos x$ (con $|x| \leq \pi$), e punti di minima distanza dalla retta $x - 3y + 5 = 0$; (8) Grafico di $|x-1|e^x$; (9) Grafico di $\operatorname{arctg} \frac{x^2-x}{|x|-2}$.



(10) Grafico di $\sin 2x - 2 \cos x$; (11) Grafico di $x^2 e^{\frac{1}{x}} - 1$; (12) Grafico di $\log(\sqrt{|x+2|} - x) + 1$.



(13) Grafico di $\sqrt{\frac{x^3 - x^2}{x - 2}}$.