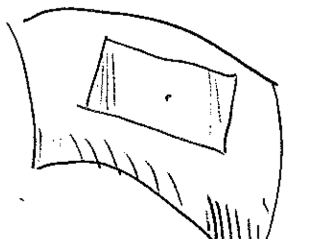
TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera
aa 2009/10

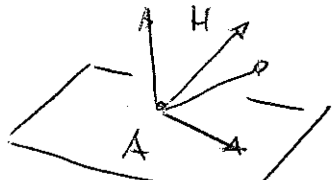
Lezione XIII

Ancora su $SO(n)$

Riprendiamo

$$f_*\big|_A (H) = A^T H + H^T A$$





Qual è la condizione per la quale H è "tangente" a $SO(n)$ in A?

f liscia, sommersiva ...

In generale ... sia x_0 t. che $f(x_0) = 0$.

Sia $x = x(t)$ $\quad x = x_0 \quad t \in I$

$\dot{x} = \dot{x}(t) \quad \dot{x}(0) = \xi \in \mathbb{R}^{n+k}$

da $f(x(t)) \equiv 0$ in I

segue $\dot{f}(x(t)) \equiv 0$

ossia $\displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}_i = 0$

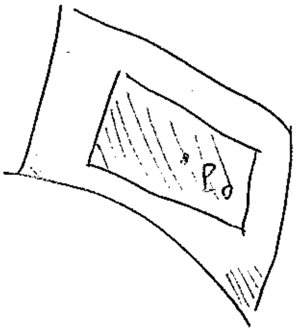
in particolare in x_0: $\sum f^0_{x_i} \xi_i = 0$

i.e. $\boxed{\xi \in \operatorname{Ker} f_*\big|_{x_0}}$

Questo è lo "spazio tangente" a $f^{-1}(0)$ (in $x_0 \in f^{-1}(0)$)

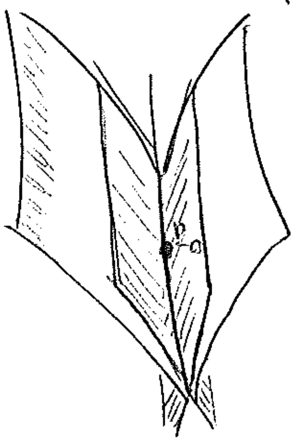
[Si pensi ai casi particolari, v. corsi di Analisi]

P_0, ξ $\quad f^0_x \underbrace{(x - x_0)}_{\xi_1} + f^0_y \underbrace{(y - y_0)}_{\xi_2} = 0$ $\quad$ retta tangente in P_0 a $f(x,y) = 0$

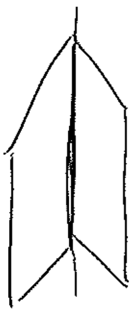


piano tangente ad una sup: $f(x,y,z)=0$

$$f_x^\circ(\underbrace{x-x_0}_{\xi_1}) + f_y^\circ(\underbrace{y-y_0}_{\xi_2}) + f_z^\circ(\underbrace{z-z_0}_{\xi_3})=0$$



$$\begin{cases} f_x^\circ(\overbrace{x-x_0}^{\xi_1}) + f_y^\circ(\overbrace{y-y_0}^{\xi_2}) + f_z^\circ(\overbrace{z-z_0}^{\xi_3})=0 \\ g_x^\circ(x-x_0) + g_y^\circ(y-y_0) + g_z^\circ(z-z_0)=0 \end{cases}$$

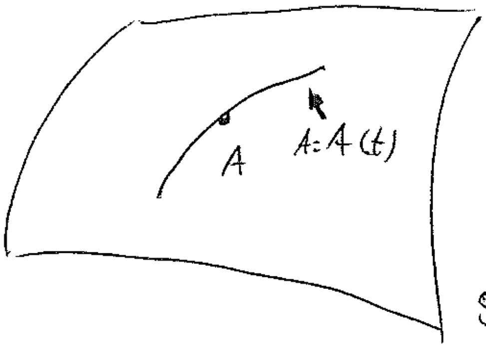


$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_x^\circ & f_y^\circ & f_z^\circ \\ g_x^\circ & g_y^\circ & g_z^\circ \end{pmatrix}}_{(f_*)(P_0)} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}}_{\equiv\, \xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(matrice di ())

Torniamo all'esempio su $SO(n)$

Sia $A = A(t)$ come sopra, ma con $A(t) \in SO(n)$ $\forall t \in I$



$SO(n)$

da $A^T(t)A(t) - I_n \equiv 0$

si ricava

$\mathring{A}^T A + A^T \mathring{A} \equiv 0$

$((\mathring{A}^T) = (\mathring{A})^T)$ in A $\quad \dot{A}(0) = H$

$$f_*\big|_A (H) = H^T A + A^T H = 0$$

ovvero, in accordo con la discussione generale

$$H \in \operatorname{Ker} f_*\big|_A$$

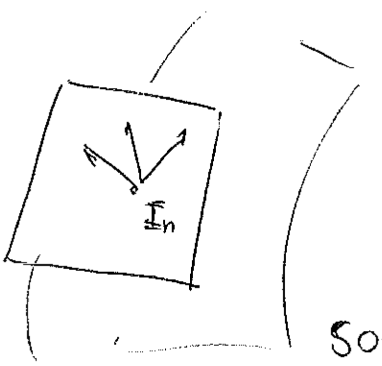
ξ

In particolare, se $A = I_n$, è

$$\boxed{H^T + H = 0} \qquad \text{i.e.} \quad H^T = -H$$

H antisimmetrica

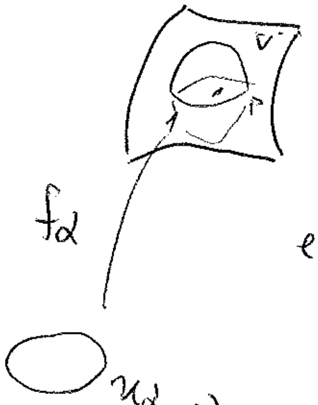
Dunque:



$SO(n)$

★ le matrici antisimmetriche costituiscono lo spazio tangente a $SO(n)$ nell'identità I_n.

☆ Le superficie "immerse" in sintesi



$S \subset \mathbb{R}^3$ sup. regolare:

$\forall p, \; \exists \; V \ni p$

e $f_\alpha : \underset{\text{aperto}}{\mathcal{U}_\alpha} \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{epi}]{} V \cap S \subset \mathbb{R}^3$

1) f_α omeomorfismo differenziabile (top. modello)

2) $(f_\alpha)_* : T_q(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathbb{R}^3$ iniettivo $\forall\, q \in \mathcal{U}_\alpha$

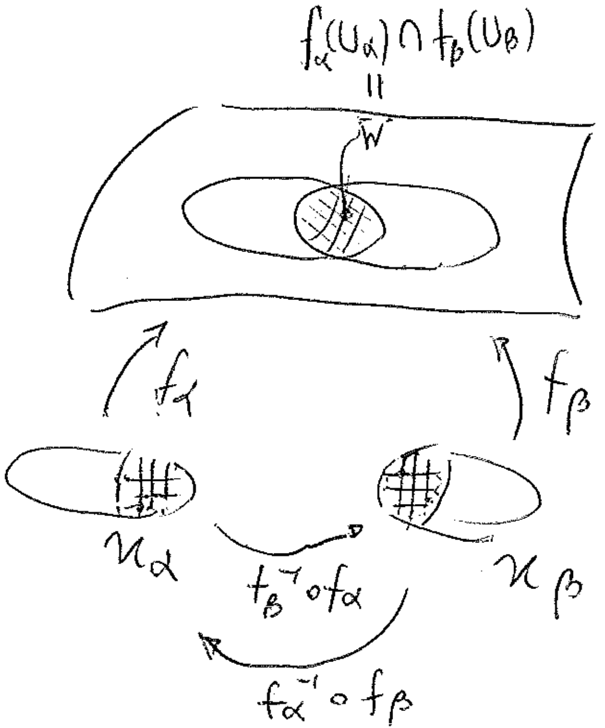
Manca la rete di coord. curvilinee locali

f_α : parametrizzazione

f_* iniettivo: immersione

Fatto importante [non lo dimostriamo: v. do Carmo]: se $f_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to S$, $f_\beta : \mathcal{U}_\beta \to S$

sono due par. t.c. $f_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cap f_\beta(\mathcal{U}_\beta) \equiv \overline{W} \neq \phi$,



$f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : f_\alpha^{-1}(\overline{W}) \to \mathbb{R}^2$

$f_\alpha^{-1} \circ f_\beta : f_\beta^{-1}(\overline{W}) \to \mathbb{R}^2$

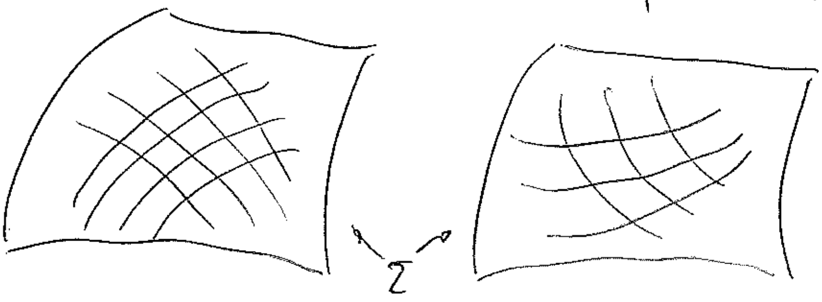
sono differenziabili (lisce)

[sono l'una l'inversa dell'altra]

|| Generalizziamo, svincolandoci da $\mathbb{R}^3$

★ Osservazione importante

nel corso di Geometria si è sorvolato sull'indipendenza dei vari concetti dalla parametrizzazione scelta [questo perché si è insistito nel lavorare con superfici parametrizzate]



(che è comunque intuitivamente chiara)

Es: La curvatura Gaussiana K è indip. dalla parametrizzazione scelta per Σ ?

Ovviamente sì: si ricordi che

(curvature principali) autovalori di S

$$K = \det(S) = k_1 k_2$$

↑ operatore di forma (op. simmetrico su $T_p\Sigma$)

e det compete ad un endomorfismo $T \in End(V)$ poiché è invariante per similitudine

$$\det T := \det m_{ee}(T)$$

se cambio base ho $m_{e'e'}(T) = \underbrace{m_{e'e}(I)}_{M}\, m_{ee}(T)\, \underbrace{m_{ee'}(I)}_{M^{-1}}$

e $\det m_{e'e'}(T) = \det m_{ee}(T)$

---

da $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Binet) è $\det(MAM^{-1}) =$
det $(= \det(BA))$ $= \det(AM^{-1}M) = \det A$

In generale $\quad P_c^T = P_c^T(\lambda)$

polinomio caratteristico di $T \in End(V)$

è invariante per similitudine

$$P_c^T(\lambda) = \det(T - \lambda I)$$

Di conseguenza, se $P_c^T(\lambda)$ è completamente fattorizzabile

$$P_c^T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\underbrace{\lambda_i}_{\substack{\text{autovalori} \\ \text{(cioè ripetuti con} \\ \text{la loro molteplicità)}}} - \lambda) = \prod_{\lambda_k \text{ distinti}} (\lambda_k - \lambda)^{\overbrace{m_a(\lambda_k)}^{\text{molt. algebrica}}}$$

anche gli autovalori sono invarianti per similitudine
[spettro di T]

[per gli operatori diagonalizzabili, lo spettro, con le dovute molteplicità, è un invariante completo per similitudine — altrimenti no (Teoria di Jordan)]

Tornando alla discussione geometrica, cambiando coordinate, non accade nulla proprio perché $S = -dN$ è definito in modo intrinseco, e così lo sono i suoi autovalori (le curvature principali) e il suo det, la curvatura Gaussiana K.
In altro modo, si ricordi che, rispetto a $(\underline{r}_u, \underline{r}_v)$, S è rappresentato dalla matrice di Weingarten, e cambiando coordinate si ottiene una matrice simile a quella iniziale.

Def. (provvisoria) (I).

varietà differenziabile n-dimensionale $\quad C^\infty$ liscia

Sia M un insieme, munito di

$$f_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

aperti $\qquad f_\alpha$ iniettiva $\forall \alpha$

con 1) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Omega} f_\alpha(U_\alpha) = M$

2) $\forall \alpha, \beta$ tali che $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$

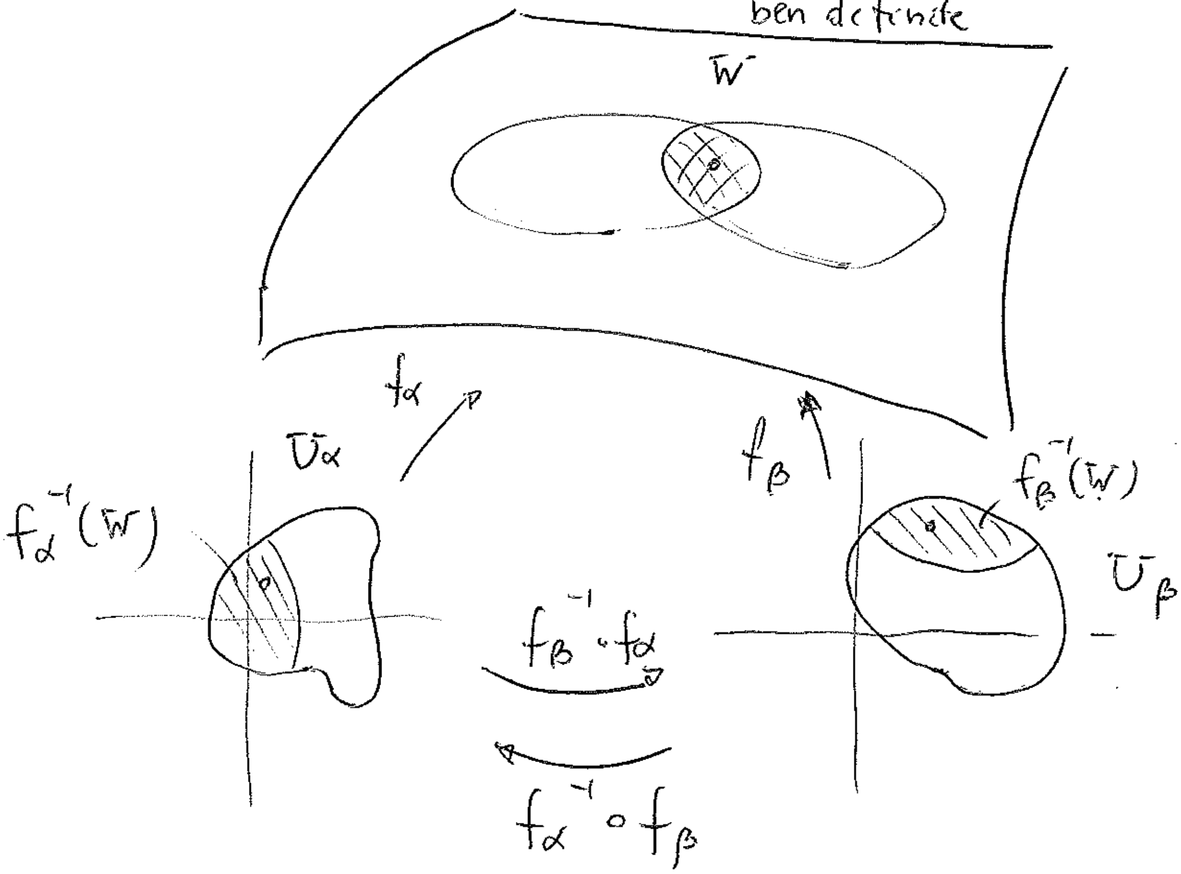
$f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$

tali che $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$, $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ siano lisce

[lo chiediamo!]

l'iniettività di f_α assicura che sono ben definite

3) la famiglia sia massimale risp. alle due proprietà



$\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in \Omega}$ struttura differenziabile liscia (Atlante)

(U_α, f_α), $U_\alpha \ni p$. parametrizzazione sistema di coordinate

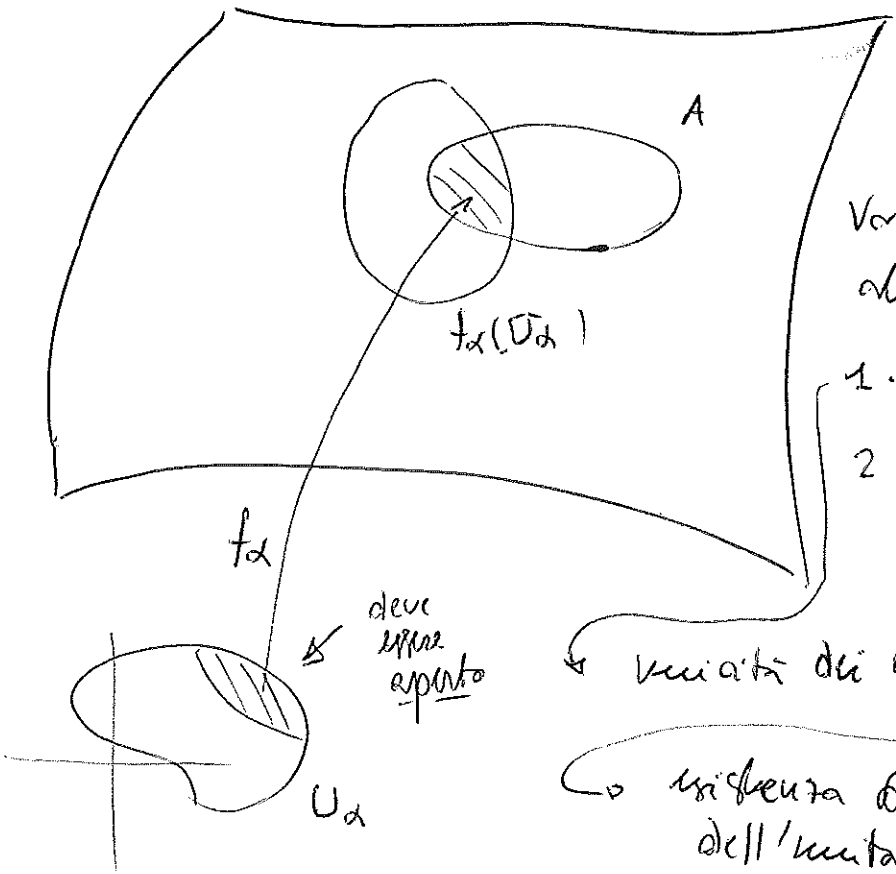
$f_\alpha(U_\alpha)$: intorno coordinato di p.

⚠ Daremo anche una definizione alternativa equivalente.

Resta individuata una topologia $\mathcal{T}$ su M

$A \subset M$ aperto se $f_\alpha^{-1}(A \cap f_\alpha(U_\alpha))$

è aperto in $\mathbb{R}^n$. Esercizio: Dim. che la def. è ben posta.



⚠ Vanno aggiunti altri due assiomi

1. Hausdorff.
2. Base numerabile

unicità dei limiti

esistenza di partizioni dell'unità

X = è localmente euclideo ma non di Hausdorff

Qualche dettaglio

$\emptyset$ è aperto : $f_\alpha^{-1}(\underbrace{\emptyset \cap f_\alpha(U_\alpha)}_{\emptyset}) = \emptyset$ aperto in $\mathbb{R}^n$ $\forall\alpha$

$\emptyset \in \mathcal{T}$

M è aperto $f_\alpha^{-1}(M \cap f_\alpha(U_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_\alpha)) = U_\alpha$ aperto in $\mathbb{R}^n$

$\in \mathcal{T}$

$\bigcup_i A_i$ aperto $\quad f_\alpha^{-1}(\bigcup A_i \cap f_\alpha(U_\alpha))$

$\in \mathcal{T}$

$$= f_\alpha^{-1}\left(\bigcup_i (A_i \cap f_\alpha(U_\alpha))\right)$$

$$= \bigcup_i \underbrace{f_\alpha^{-1}(A_i \cap f_\alpha(U_\alpha))}_{\text{aperto } \forall\alpha} \Rightarrow \text{è aperto } \forall\alpha.$$

$A_1 \cap A_2$ aperto $\quad f_\alpha^{-1}(A_1 \cap A_2 \cap f_\alpha(U_\alpha)) =$

$\in \mathcal{T}$

$$= f_\alpha^{-1}((A_1 \cap f_\alpha(U_\alpha)) \cap (A_2 \cap f(U_\alpha)))$$

$$= \underbrace{f_\alpha^{-1}(A_1 \cap f_\alpha(U_\alpha))}_{\text{aperto}} \cap \underbrace{f_\alpha^{-1}(A_2 \cap f_\alpha(U_\alpha))}_{\text{aperto}} \Rightarrow \text{è aperto}$$

◇ ◇ ◇

Vediamo ora una costruzione alternativa, ma equivalente

4 Varietà topologiche

Uno spazio topologico M è detto <u>varietà topologica</u> di <u>dimensione n</u> (topological n-manifold) se

1. M è di Hausdorff
2. M è a base numerabile
   countable basis
   second countable
3. M è localmente euclideo :
   locally Euclidean

$\forall\, m \in M$, $\exists\, U \ni m$,
intorno
neighbourhood

[intorno di x : aperto $\ni x$]

$V \subset \mathbb{R}^n$

n fisso, i.e. indipendente da m
fixed

e $\varphi : U \to V$ omeomorfismo (carta locale) local chart

ovvero: ogni pto di M ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$; senza perdere in generalità, si può considerare un disco (palla) n-dimensionale

Nota storica : la spinta principale della costruzione della geometria differenziale è venuta dal Theorema Egregium di Gauss (1829) $\to$ Dissertazione di Riemann (1854)

$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ (topologia) base
se $\forall\, A \in \mathcal{T}$, $A = \bigcup_\lambda B_\lambda$

ex: in $\mathbb{R}^n$, i dischi aperti di centri a coord. razionali e raggi razionali danno vita (give rise) ad una base numerabile

Osserviamo che, se $B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ ed esiste allora $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subset B_1 \cap B_2$ ($B_1 \cap B_2 = \bigcup_\lambda B_\lambda$ opp.).

Data, su un insieme X qualsiasi, una famiglia $\mathcal{B}$ di sottinsiemi di X contenente ϕ e X e tale $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ e che $\forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ $\exists\, B \subset B_1 \cap B_2$, $\exists !$ topologia su X tale che $\mathcal{B}$ ne sia una base:

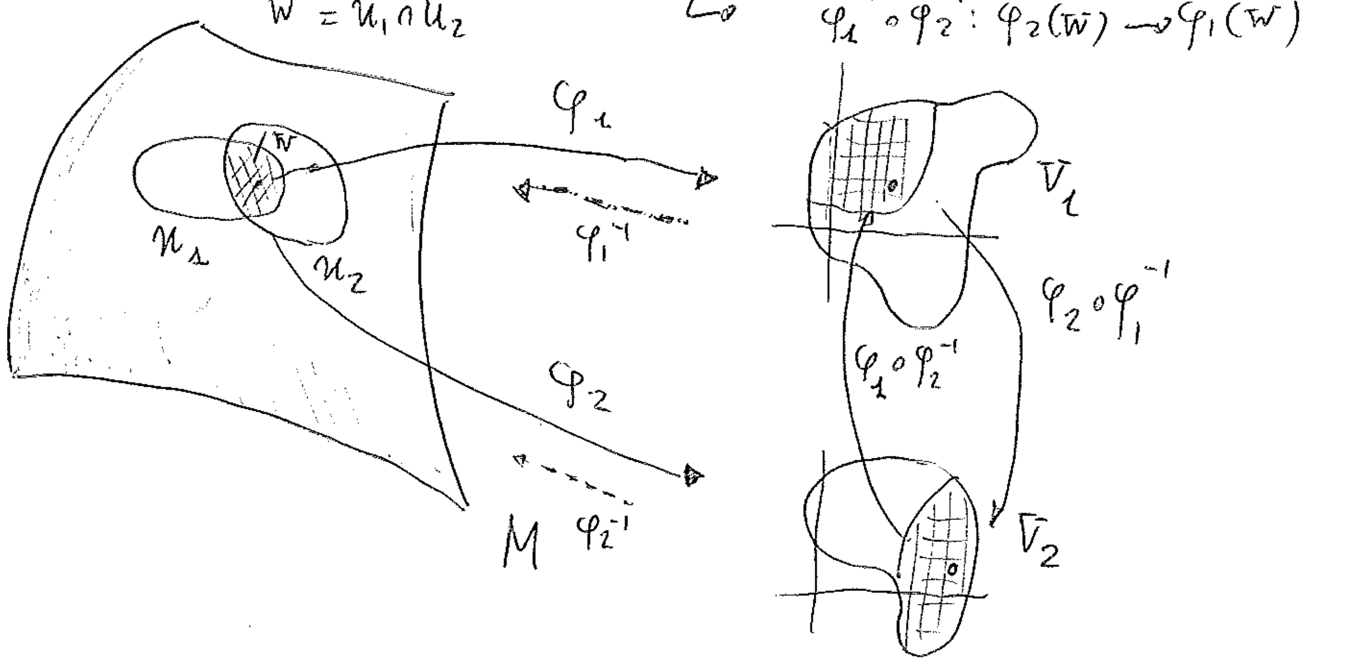
$\mathcal{T}$ si ottiene prendendo come aperti le unioni di insiemi di $\mathcal{B}$.

XIII-10

Per avere una varietà differenziabile, si richiede che i cambiamenti di carta siano lisci:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\bar W) \to \varphi_2(\bar W)$$
$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(\bar W) \to \varphi_1(\bar W)$$

$\bar W = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$



una varietà differenziabile M è dunque uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile, provvisto di un atlante $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{Q}}$

(aperti; carte locali; insieme di indici)

ove $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}} \mathcal{U}_\alpha = M$ [i.e. $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ è un ricoprimento (aperto) di M

$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \bar V_\alpha$ omeomorfismo

(aperto di $\mathbb{R}^n$)

e se $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \equiv \bar W_{\alpha\beta} \neq \emptyset$

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(\bar W) \to \varphi_\beta(\bar W)$ è liscia

(aperto; aperto)

$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(\bar W) \to \varphi_\alpha(\bar W)$ è liscia

* L'atlante si considera *massimale*:

data $\varphi : U \to V$

con $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$, $\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$ lisce, i.e. (U, φ) compatibile con $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

allora $\varphi = \varphi_\beta$ per qualche $\beta \in \mathcal{A}$

Due atlanti si dicono compatibili (o equivalenti), se la loro unione è nuovamente un atlante.

|| Un atlante massimale è l'unione di tutti gli atlanti compatibili con un atlante fissato.

In modo ancora più formale, una varietà diff. di dimensione n è

$$\underset{\substack{\text{sp. top.}\\ \text{di Hausdorff}\\ \text{localmente}\\ \text{euclideo}}}{\underset{\parallel}{M}}\;,\ \underset{\substack{\text{atlante}\\ \text{(massimale)}}}{\underset{\uparrow}{[\,\Phi\,]}}$$

$[\Phi]$: classe di equivalenza individuata da un atlante massimale

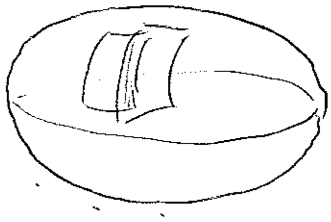
Equivalentemente si dice M possiede una struttura di varietà differenziabile (di classe C^k) se ecc...
(o struttura liscia, nel caso C^∞)

$C^\omega \to$ varietà analitica reale

f. analitiche

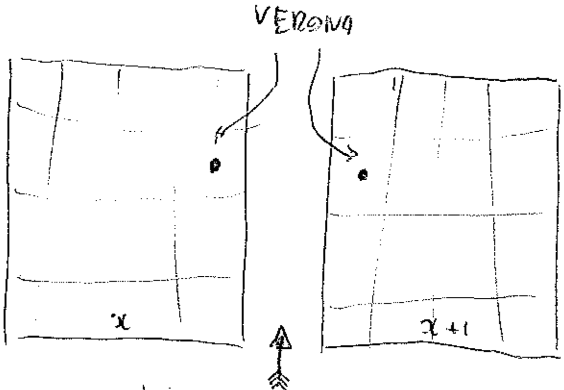
se $\mathbb{C}^n$ sostituisce $\mathbb{R}^n$ e si richiede l'olomorfia (i.e. analiticità complessa), si ha la nozione di varietà complessa di dim n. Se $n = 1$ si parla di superficie di Riemann

Motivazioni:



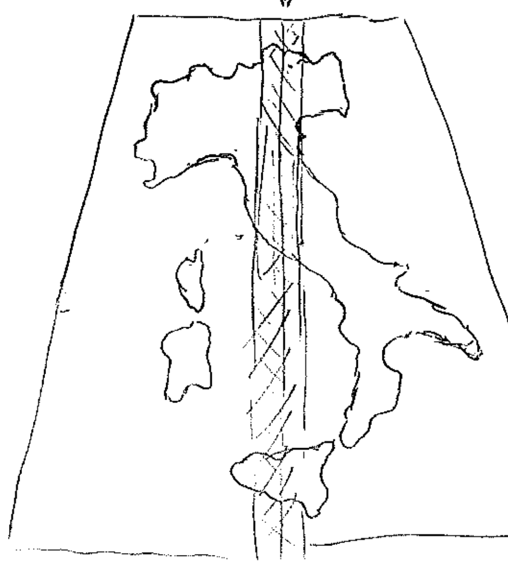
ellissoide terrestre
(eccentricità accentuata!!)

non è ovviamente
massimale



è stato calcolato un
cambiamento di carta,
"invisibile" all'... utilizzatore finale.

zona di sovrapposizione

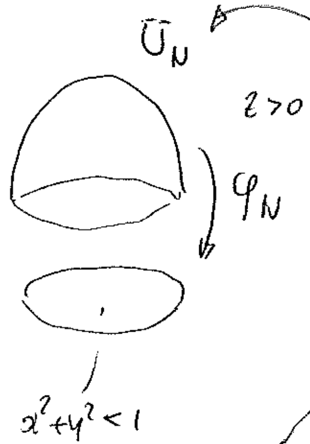


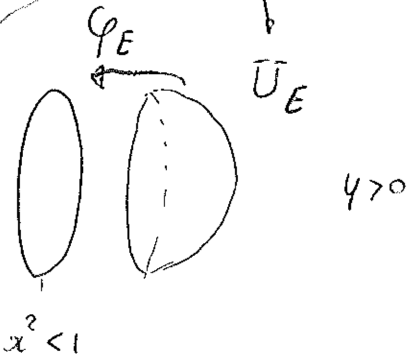
Carta d'Italia
di Gauss-Boaga

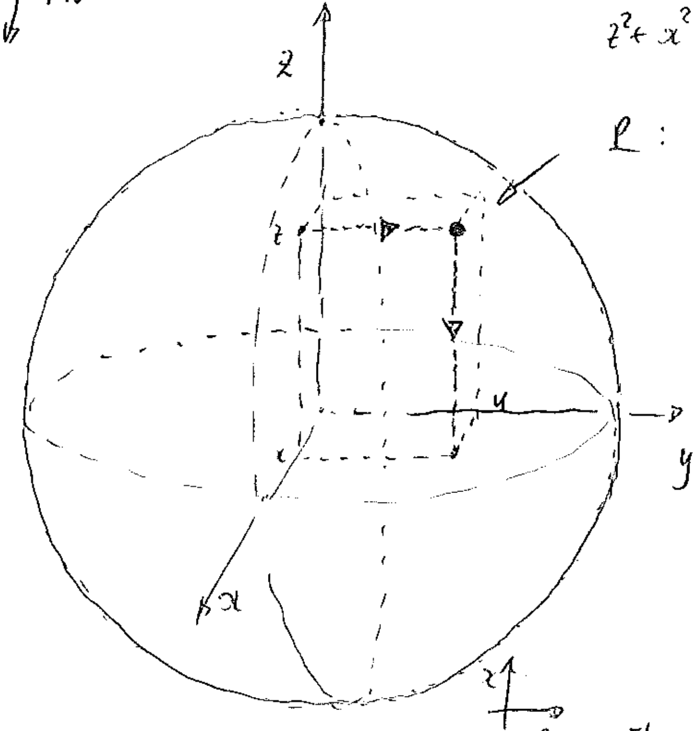
$$S^2 = \{x^2+y^2+z^2=1\}$$

topologia relativa (indotta da $\mathbb{R}^3$)

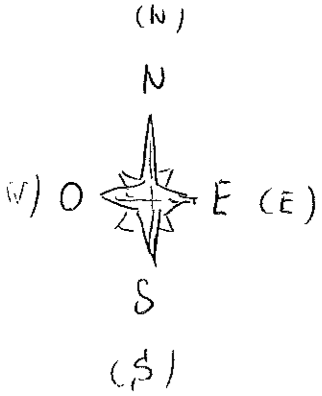
aperti







$P : (x, y, z) \in \bar{U}_N \cap \bar{U}_E$



$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r, "\varphi_E^{-1}"] & \circ \arrow[d, "\varphi_N"] \\ & \circ \end{tikzcd}$$

$$(z, x) \xmapsto{\varphi_E^{-1}} (x, y, z)$$

$$(x, y, z) \xmapsto{\varphi_N} (x, y, 0)$$

$$(z, x) \xmapsto{\varphi_N \circ \varphi_E^{-1}} (x, \sqrt{1-z^2-x^2})$$

tale applicazione è liscia, con inversa $(\varphi_E \circ \varphi_N^{-1})$ liscia