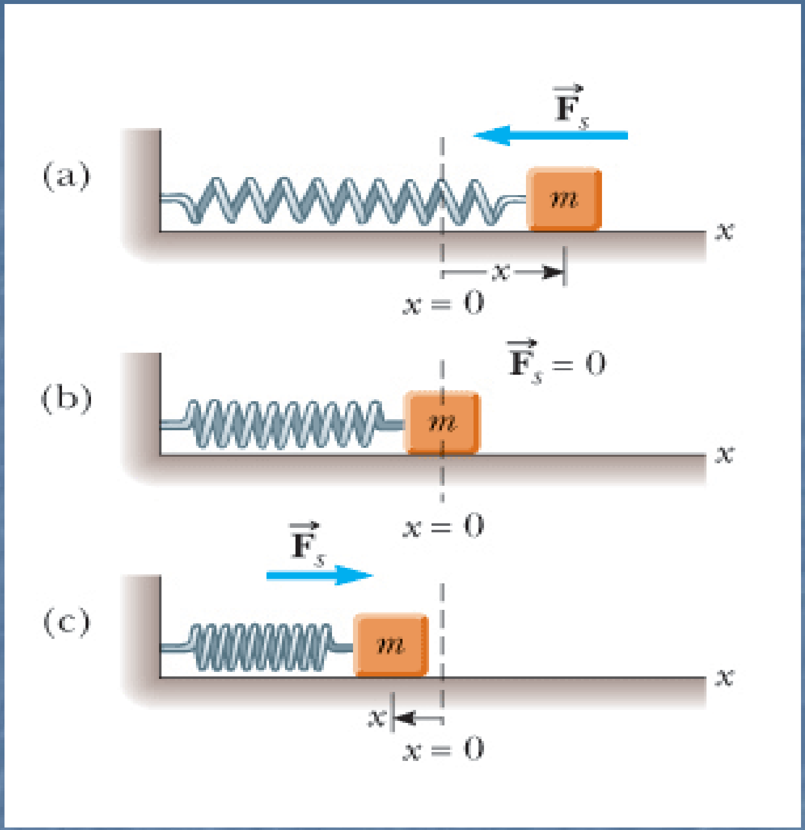
Serway, Jewett

Fisica per scienze ed ingegneria

Capitolo 15

EdiSES



Blocchetto legato ad una molla in moto su un piano orizzontale privo di attrito.

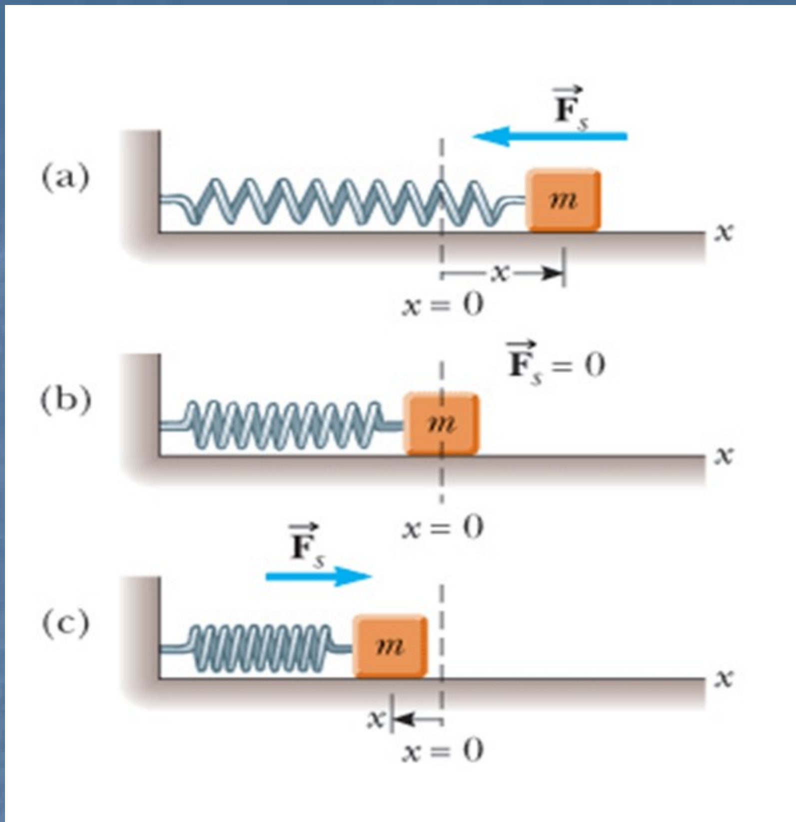
Forza elastica di richiamo: $F_x=-Kx$ (Legge di Hooke).

Per $x>0$, F_s diretta negativamente;
Per $x<0$, F_s diretta positivamente.

$$F = ma \qquad -kx = ma_x$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

L'accelerazione del blocco è proporzionale al suo spostamento e in segno opposta allo spostamento. Questo moto viene detto moto armonico. Un corpo compie un moto armonico quando la accelerazione in modulo è proporzionale allo spostamento e opposta in verso.



$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

Se il corpo si trova nella posizione iniziale A e viene lasciato libero inizierà a muoversi con a=-Ak/m .
Quando passa per x=0 avrà accelerazione nulla. In quell'istante l'accelerazione cambia segno e la velocità avrà il suo massimo (in modulo).
Il blocco continuerà a muoversi verso sinistra con accelerazione positiva fino a che raggiungerà il punto x=-A dove l'accelerazione vale a=Ak/m. La velocità sarà nulla.
Il blocco continuerà nel moto periodico, accelerato da una accelerazione positiva che aumenta la velocità fino al max che si ha di nuovo per x=0.

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \Phi)}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \Phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \Phi)$$

A=ampiezza del moto
ω=pulsazione (o frequenza angolare)
Φ=angolo di fase (o fase)

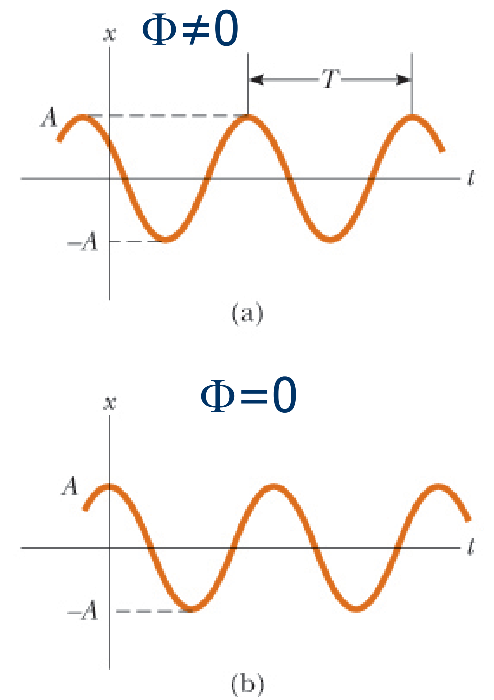


Figura 15.2 (a) Un grafico x–t per una massa che segue un moto armonico. L'ampiezza del moto è A, il periodo (definito nell'Eq. 15.10) è T. (b) Il grafico x–t nel caso particolare in cui, per $x = A$ $t = 0$, e quindi $\phi = 0$.

Periodo del moto T: intervallo di tempo necessario per compiere in ciclo completo

$$[\omega(t+T) + \Phi] - (\omega t + \Phi) = 2\pi \qquad \omega T = 2\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

L'inverso del periodo=frequenza=numero di oscillazioni complete compiute nell'unità di tempo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Unità di misura: [f]=cicli/s=1/s=Hz

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il periodo e la frequenza dipendono dalla m e dalla k (ma non da A e ϕ)

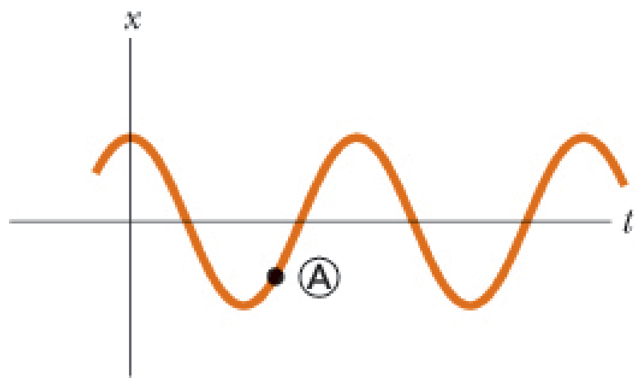


Figura 15.3 (Quiz 15.2) Un grafico x–t per una massa in moto armonico. Nel grafico la posizione occupata dalla massa in un certo istante è indicata con Ⓐ.

Quiz 15.2

Corpo in moto armonico nel punto A descritto dalla:

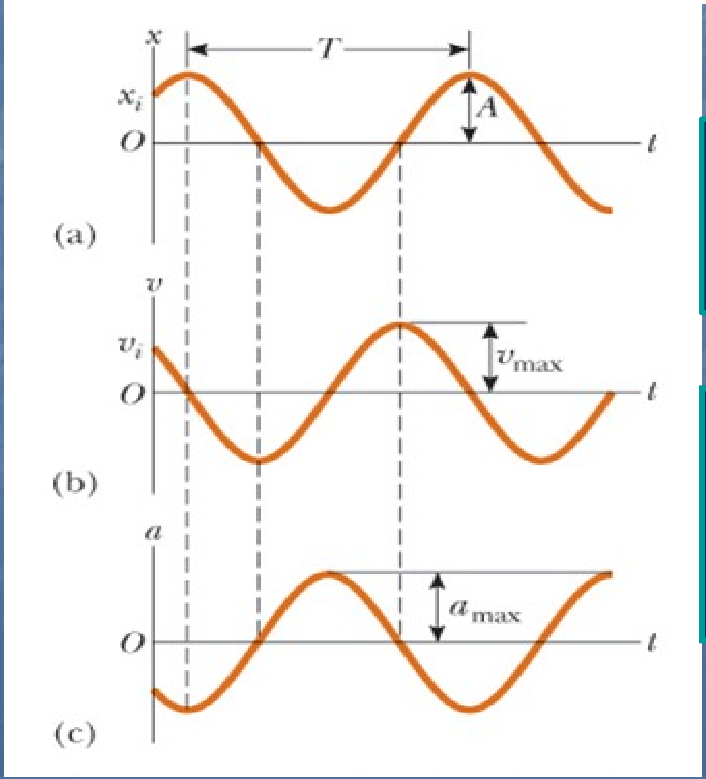
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

b) Spostamento e velocità negativi.
c) Lo spostamento è positivo e la velocità è zero.
d) Lo spostamento è negativo e la velocità è zero.
e) Lo spostamento è positivo e la velocità negativa.
f) Lo spostamento è negativo e la velocità è positiva.

Velocità ed accelerazione di un corpo in moto armonico:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\cos(\omega t + \phi)\right) = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

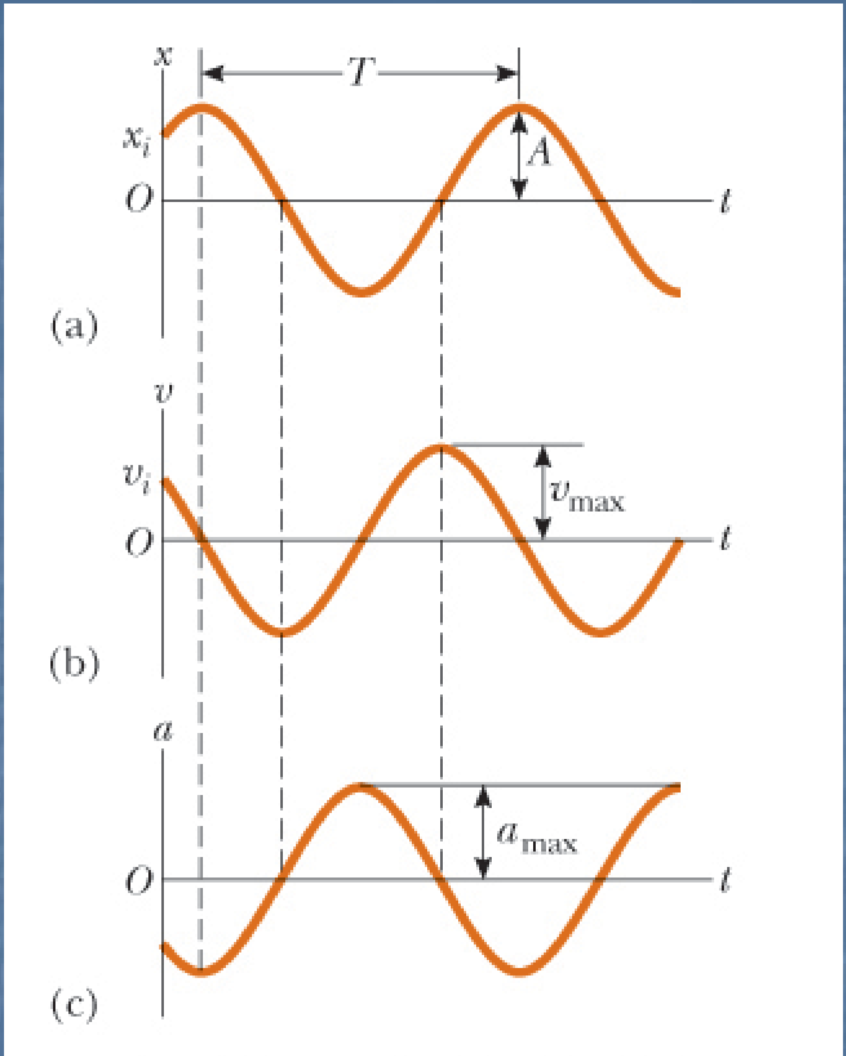
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\right) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$



Fase della velocità differisce di 90° rispetto alla posizione. Per x_{max}, v è nullo. Per x=o, |v|=max

Fase della accelerazione differisce di 180° rispetto alla posizione. Per |x|=max, |a|=max, ma a e x sono opposti in segno.

EdiSES



$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \Phi)$$

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \Phi)$$

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Come vengono determinate le costanti del moto?

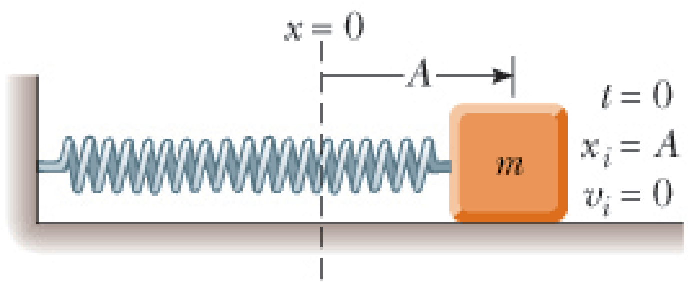


Figura 15.6 Un sistema massa-molla che inizia il suo moto dalla posizione $x = A$, dove si trova in quiete, a $t = 0$. In questo caso, $\phi = 0$ e, di conseguenza, $x = A \cos \omega t$.

Condizioni iniziali: corpo fermo nel punto di massimo allungamento.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

Per t=0

$$x(0) = A \cos \phi = A$$

$$v(0) = -\omega A \,\mathrm{sen}\, \phi = 0$$

$\phi=0$

$$x = A \cos \omega t$$

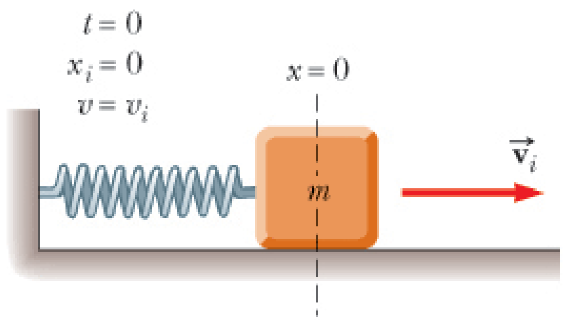


Figura 15.8 Il sistema blocco-molla è oscillante: $t = 0$ è l'istante in cui la massa passa per la posizione di equilibrio $x = 0$ e il blocco si muove con velocità v_i verso destra.

Condizioni iniziali: per t=0, x=0 e v(0)=vi

$$x(0) = A\cos\Phi = 0$$

$$\Phi = \pm\pi/2$$

$$v(0) = -\omega A \,\mathrm{sen}\,\Phi = v_i$$

$$A = -(\pm)v_i/\omega$$

Siccome $v_i>0$ e $A>0$, allora $\phi=-\pi/2$

$$x = \frac{v_i}{\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

ENERGIA

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \Phi)$$

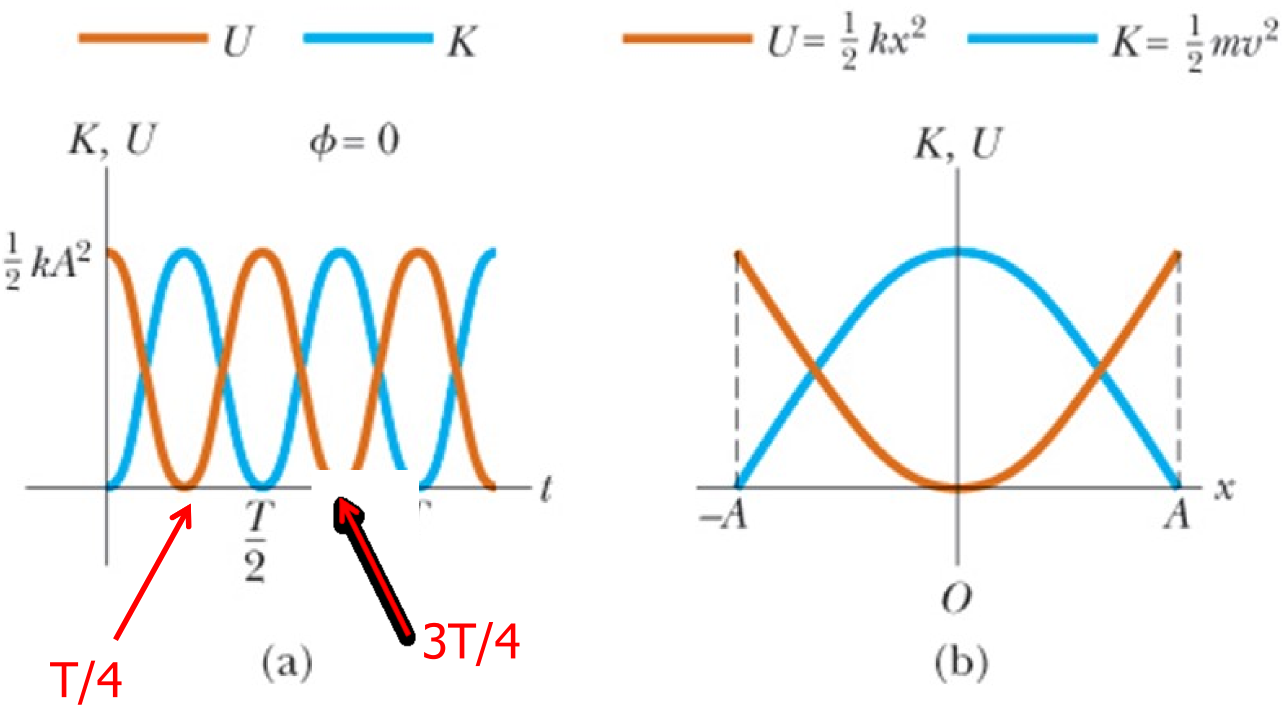
$$\omega^2 = k/m$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \Phi)$$

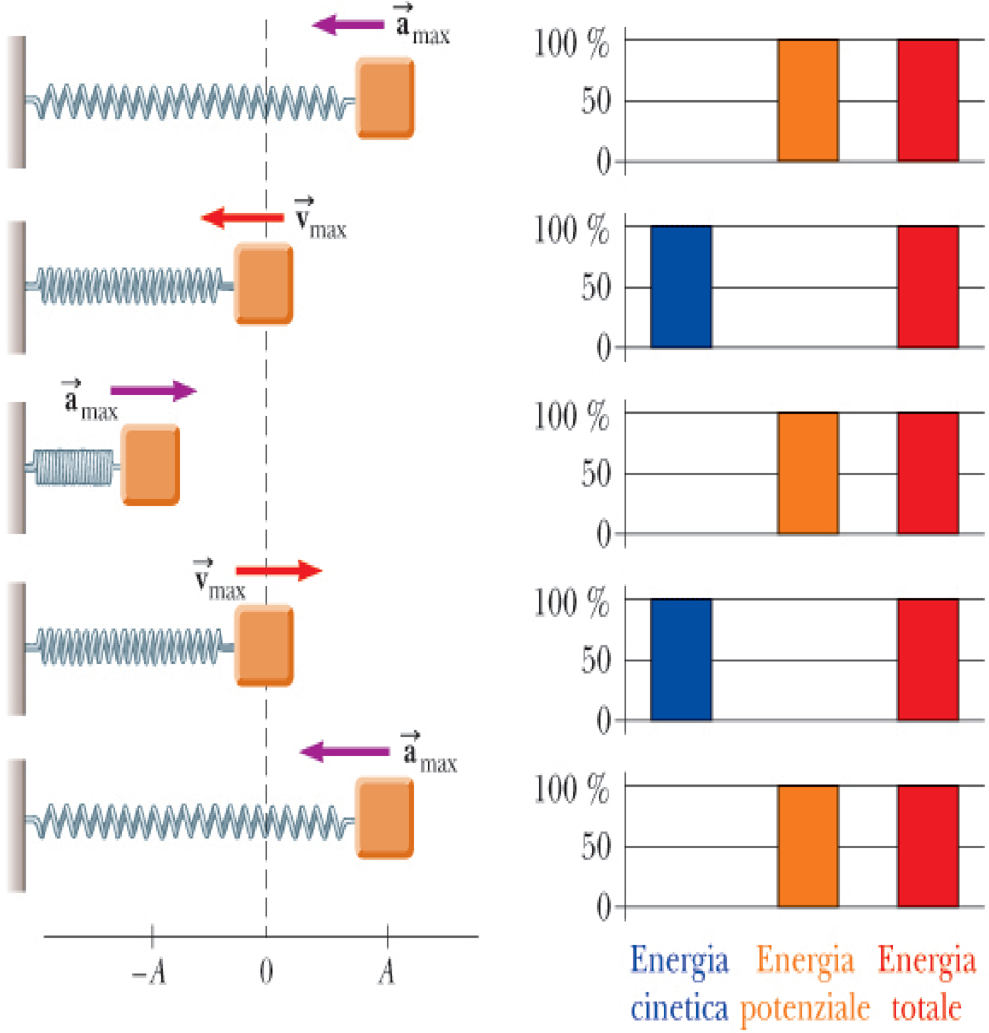
$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \Phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \Phi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2$$

ENERGIA DELL'OSCILLATORE COSTANTE DEL MOTO



$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

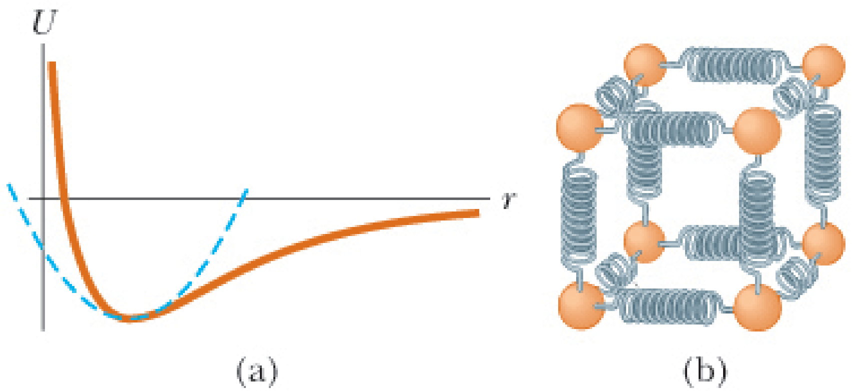


Figura 15.11 (a) Se lo spostamento degli atomi di una molecola dalla loro posizione di equilibrio è piccolo, in un intorno centrato nella posizione di equilibrio il grafico dell'energia potenziale in funzione della separazione fra gli atomi è simile a quello dell'energia potenziale di un oscillatore armonico. (b) La forza che tiene insieme gli atomi si può schematizzare come quella prodotta da un sistema di molle che collegano gli atomi vicini.

EdiSES

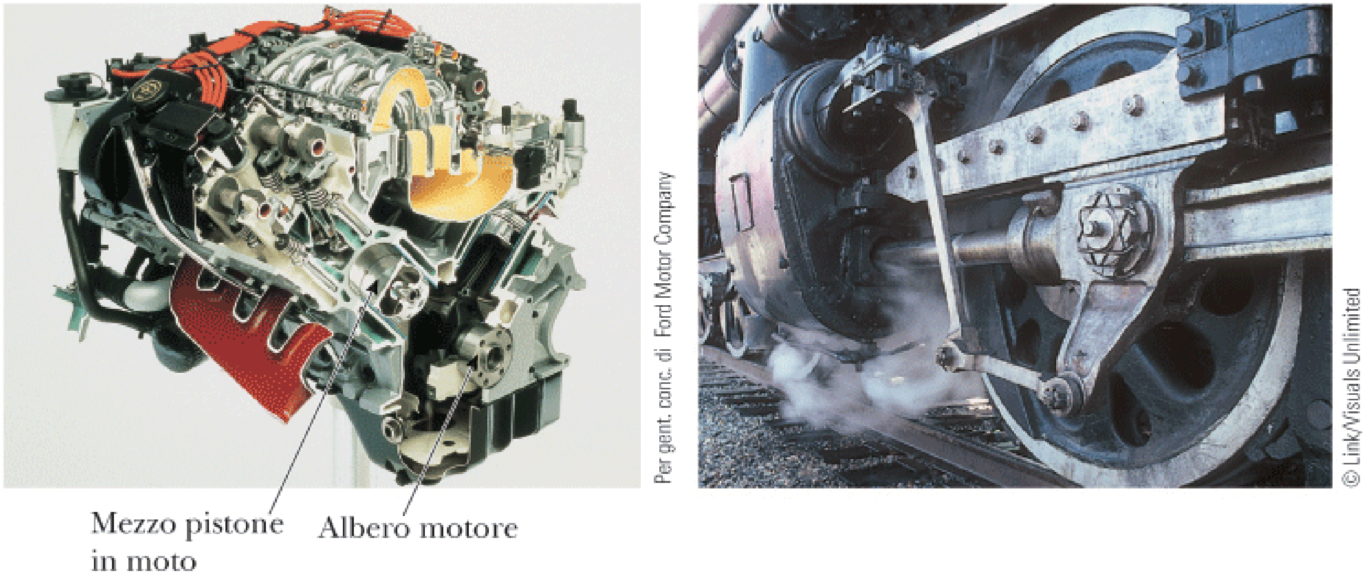


Figura 15.12 *(A sinistra)* I pistoni di un motore d'automobile percorrono un moto periodico monodimensionale, come illustrato dallo spaccato di due dei pistoni. Il moto è convertito prima nel moto circolare dell'albero motore ed infine in quello delle ruote dell'automobile. *(A destra)* Il moto avanti-indietro dei pistoni di una vecchia locomotiva a vapore è convertito nel moto circolare delle ruote.

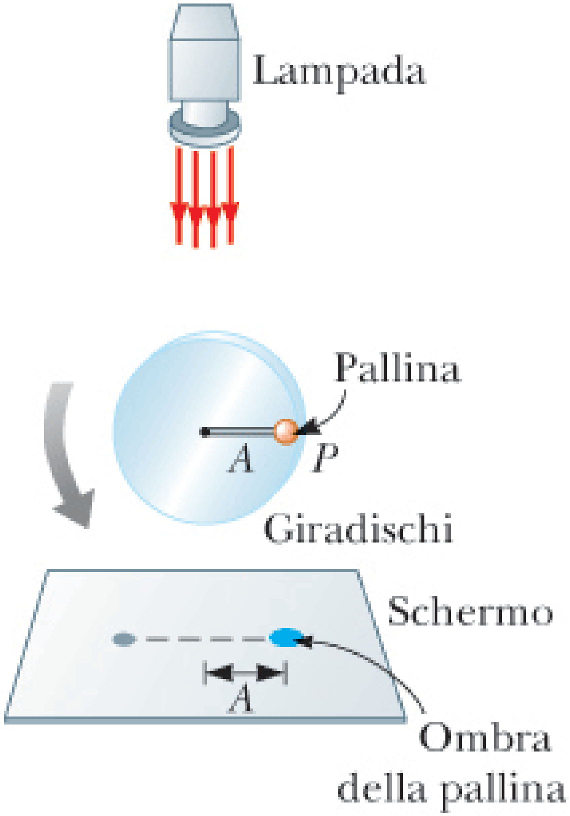
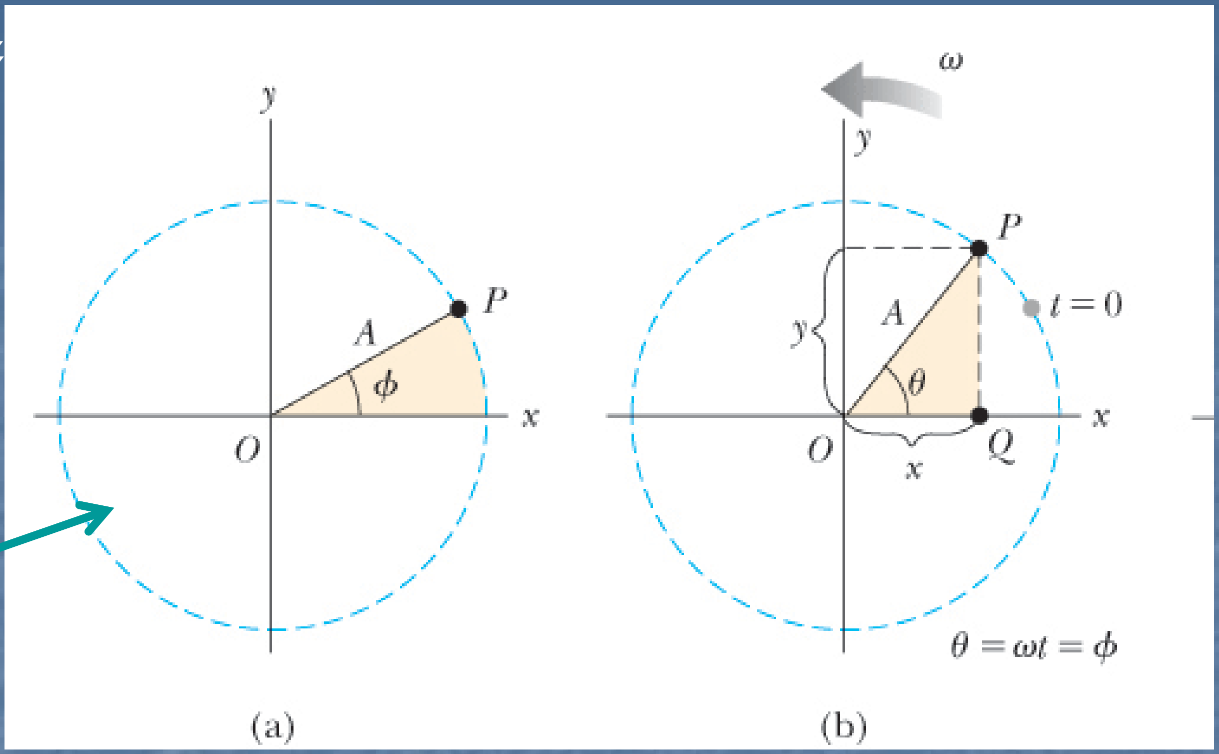


Figura 15.13 Un apparato sperimentale per mostrare la connessione fra il moto di un oscillatore armonico ed il moto circolare. L'ombra di una palla in moto circolare uniforme, proiettato su uno schermo, segue un moto armonico.

Confronto tra moto armonico e moto circolare uniforme

Mentre il piatto ruota a velocità angolare uniforme, l'ombra della pallina si muove avanti e indietro sullo schermo compiendo un moto armonico.

Serway,



Cerchio di riferimento (raggio A)

t=0, posizione del punto P individuata dall'angolo ϕ

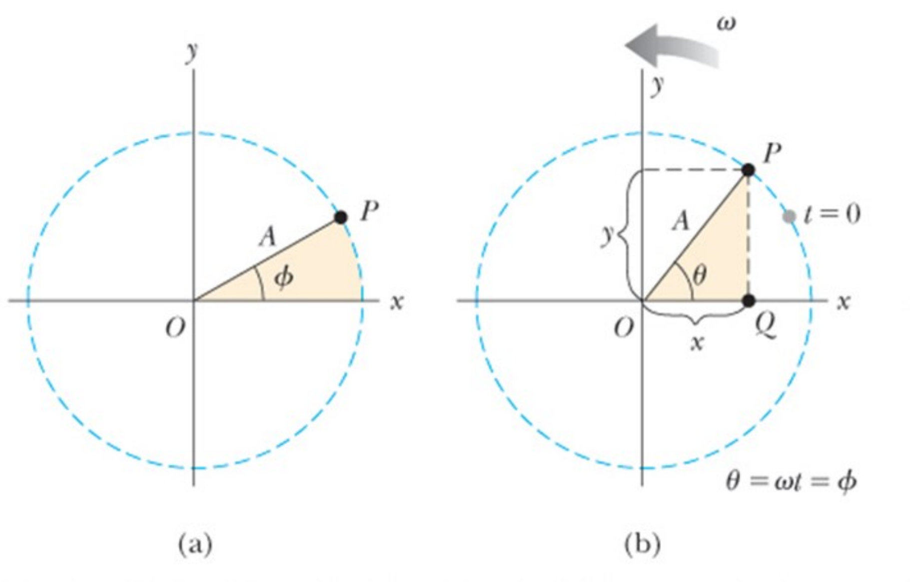
t=t, posizione del punto P individuata dall'angolo $\theta=\omega t+\phi$,

allora la sua coordinata x vale $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

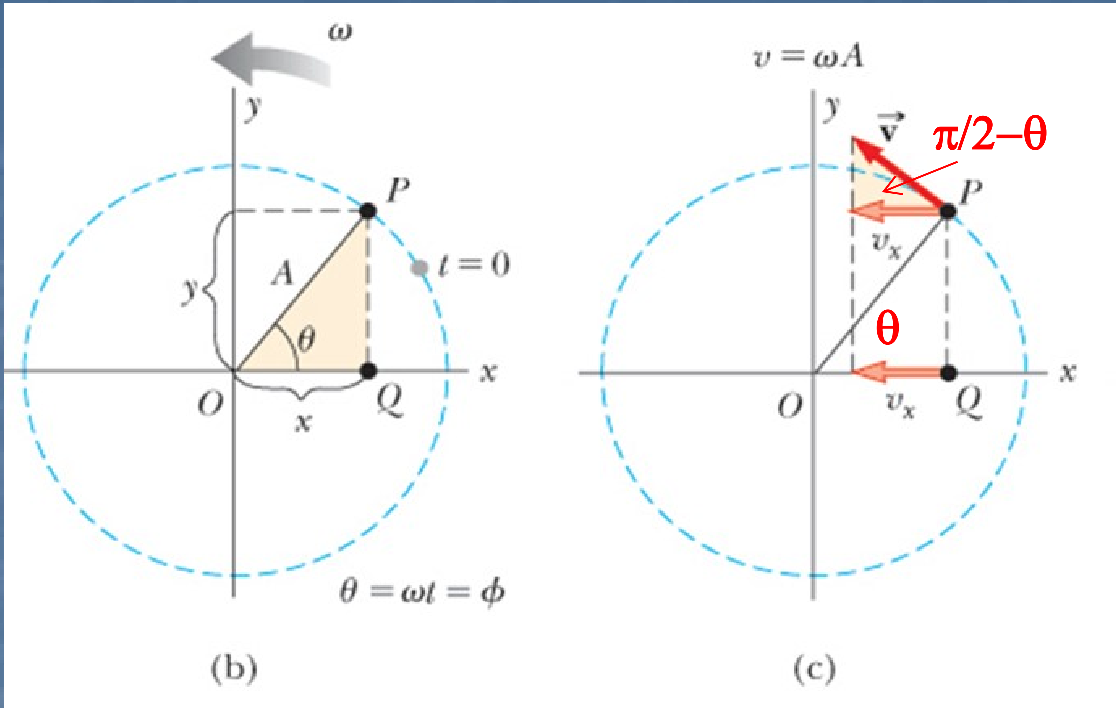
Mentre P ruota, la sua proiezione sull'asse x, Q, si muove di moto armonico tra A e –A.

Quindi il moto armonico lungo una retta può essere pensato come la proiezione del moto circolare uniforme lungo un diametro del cerchio di riferimento

EdiSES



Altre considerazioni:
Il periodo che impiega P a percorrere tutto il cerchio di riferimento è lo stesso che impiega Q a completare il moto armonico: la velocità angolare del punto P è uguale alla pulsazione del moto armonico di Q.
La costante di fase del moto armonico è la posizione angolare iniziale del punto. Il raggio del cerchio di riferimento è l'Ampiezza del moto armonico.



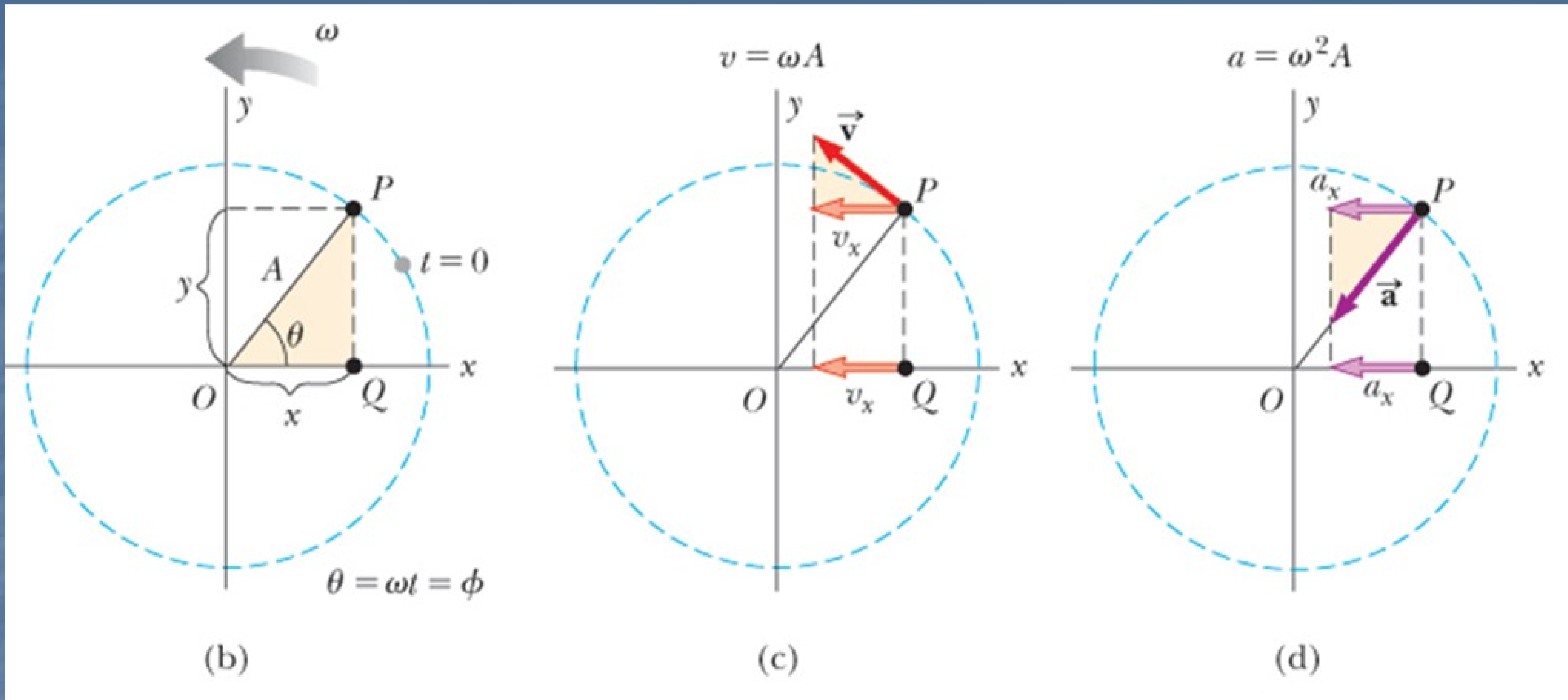
Nel moto circolare uniforme $v=r\omega=A\omega$.

$v_x=-v*\cos(\pi/2-\theta)=-v*\sin\theta=$
$-A\omega*\sin\theta=-A\omega*\sin(\omega\tau+\phi)$

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Se deriviamo la posizione di Q otteniamoproprio v_x

(La componente x della velocità nel moto circolare uniforme= velocità del moto armonico che avviene lungo x, velocità del punto Q)

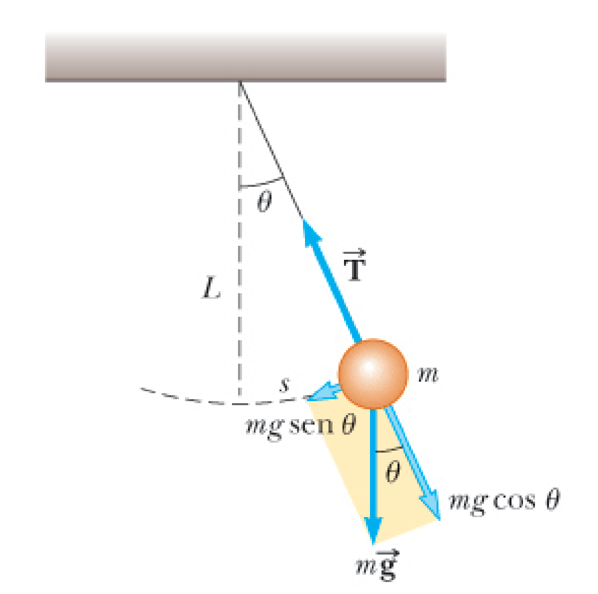


a_x=-a*cos(θ)=-a*cos($\omega\tau+\phi$)=-ω^2*A*cos($\omega\tau+\phi$)

Uguale alla derivata seconda di x(t): $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

La componente x dell'accelerazione nel moto circolare uniforme=accelerazione del punto Q

PENDOLO SEMPLICE



$$F_t = -mg \operatorname{sen}\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

s=Lθ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta \simeq -\frac{g}{L}\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Analoga a:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$\theta = \vartheta_{max}\cos(\omega t + \Phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Permette la misura del tempo e di g

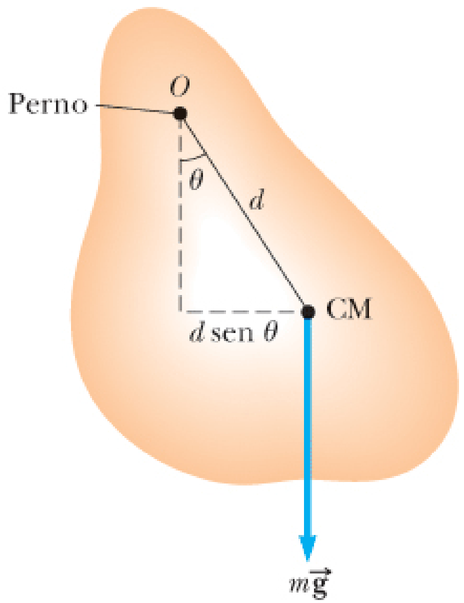


Figura 15.17 Un pendolo fisico incernierato in O.

PENDOLO FISICO

Si applica la relazione analoga della legge di Newton per il corpo rigido in rotazione: $\Sigma\tau = I\alpha$

$$-mgd \,\mathrm{sen}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Può essere usato per misurare I nota la posizione del centro di massa;
Se tutta la massa è concentrata nel centro di massa ($I=md^2$) pendo semplice.

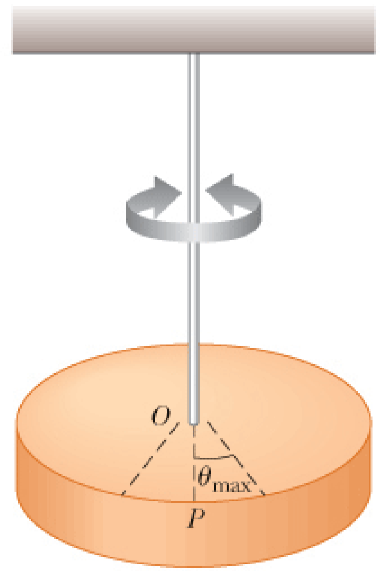


Figura 15.19 Un pendolo di torsione è formato da un corpo rigido sospeso ad un filo attaccato ad un supporto rigido. Il corpo oscilla intorno alla linea *OP* con un'ampiezza θ_{max}.

Serway, Jewett
Fisica per scienze ed ingegneria
EdiSES

Pendolo di torsione: quando il corpo viene ruotato di un angolo θ, il filo è sottoposto ad una torsione ed esercita sul corpo un momento τ proporzionale a θ:

$$\tau = -k^{*}\theta$$

$$\tau = -k^{*}\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k^{*}}{I}\,\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k^{*}}}$$

Forza di attrito viscoso: **F**=-k**v**

OSCILLAZIONI SMORZATE

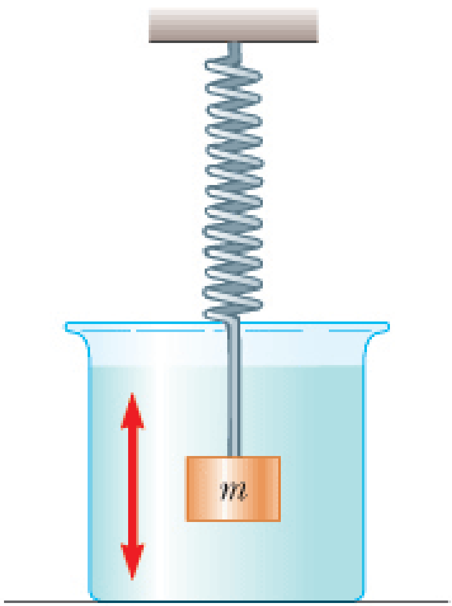


Figura 15.20 Una massa appesa ad una molla ed immersa in un liquido viscoso è un esempio di oscillatore smorzato.

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Quando la forza dissipativa è piccola rispetto alla forza elastica (b piccolo)

$$x = A e^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

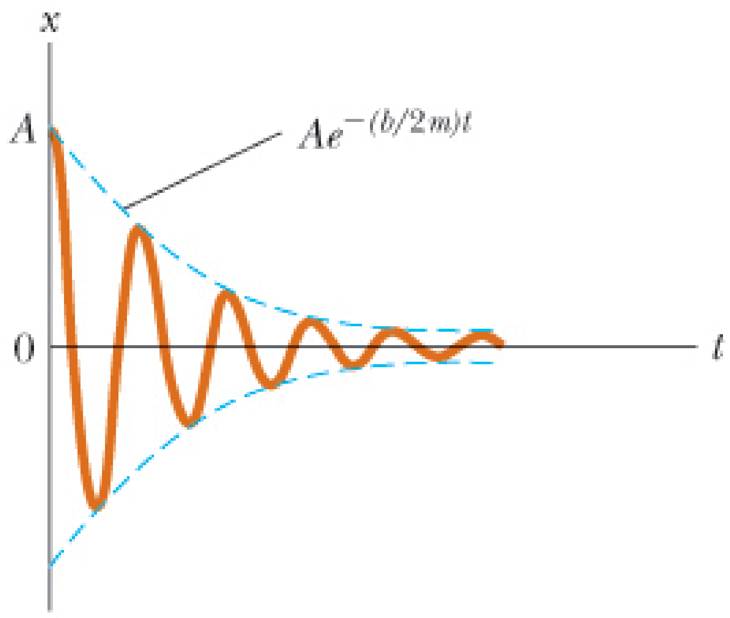


Figura 15.21 Il grafico dello spostamento in funzione del tempo per un oscillatore smorzato. Si noti la diminuzione dell'ampiezza nel tempo.

$$x = A\, e^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Quando $b/2m < \omega_0$, il moto si dice debolmente smorzato.

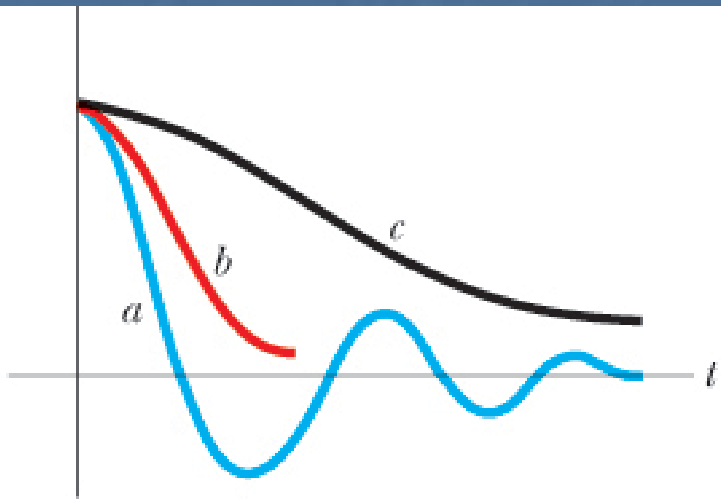


Figura 15.22 Il grafico dello spostamento in funzione del tempo per un oscillatore debolmente smorzato (curva *a*, blu), un oscillatore soggetto a smorzamento critico (curva *b*, rossa) e un oscillatore fortemente smorzato (curva *c*, nera).

Curva a: debolmente smorzato.

Valore critico di b: quando $(b/2m)=\omega_0$

Il corpo non oscilla; quando è spostato dalla posizione di equilibrio, semplicemente torna alla sua posizione di equilibrio (senza raggiungerla). Curva b. Condizioni di smorzamento critico.

Se (b/2m)>w0, cioè la forza è grande rispetto alla forza di richiamo, il sistema è sovrasmorzato, tende tornare alla sua posizione di equilibrio. Il tempo necessario aumenta all'aumentare della forza di attrito. Curva c)

EdiSES

$$\sum F_x = m a_x$$

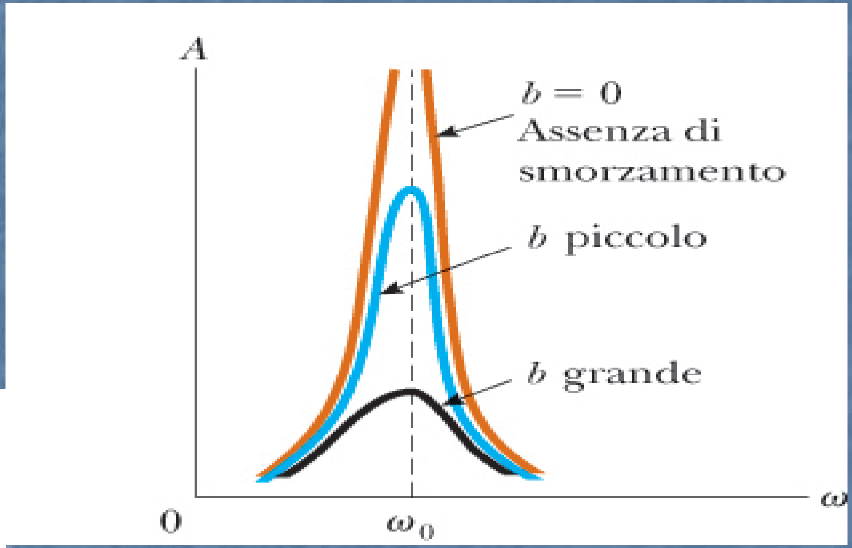
OSCILLAZIONI FORZATE: si applica una forza che compensa la diminuzione di A dovuta alla forza di attrito.

$$F_0 \operatorname{sen} \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Per $\omega \sim \omega_0$, siamo in risonanza

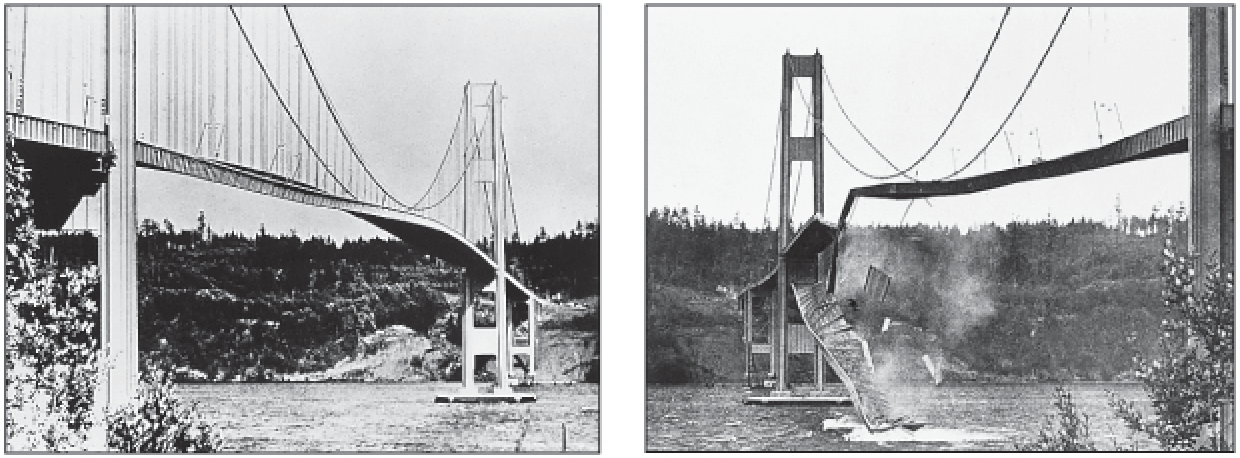
Con l'applicazione della forza, l'ampiezza delle ocillazioni inizia ad aumentare fino a che raggiunge un valore costante.

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$



$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



(a) (b)

Figura 15.24 (a) Nel 1940 la turbolenza del vento innescò nel ponte Tacoma Narrows vibrazioni torsionali vicine alla frequenza propria di risonanza del ponte. (b) Stabilitesi le condizioni di risonanza, il ponte crollò. (*UPI/Bettmann Newsphotos)*

Esercizio

Una particella si muove di moto armonico lineare attorno al punto x=0. All'istante t=0 lo spostamento è x= 0.37 cm e la velocità è nulla. Se la frequenza del moto è 0.25 Hz, determinare:

a) Il periodo
b) La frequenza angolare
c) La ampiezza
d) Lo spostamento al tempo t
e) La velocità al tempo t
f) La velocità massima (in modulo).
g) L'accelerazione al tempo t
h) L'accelerazione massima (in modulo)
i) Lo spostamento all'istante t=3 s
j) La velocità a t=3 s

VALUTAZIONE 1 punto per ogni domanda.

EdiSES

- Esercizio
- 1) In un moto armonico semplice, quando lo spostamento dal centro di oscillazione è metà dell'ampiezza A dell'oscillazione medesima si dica:
- (a) quale frazione dell'energia totale è energia cinetica?
- (b) quale frazione dell'energia totale è energia potenziale?
- (c) A quale spostamento corrisponde metà energia cinetica e metà energia potenziale?