

Enunciare il teorema di Lagrange ed illustrarlo graficamente.

Verificare, usando Lagrange, la disuguaglianza

$$\log(1+3x) \leq 3x \quad \forall x > -\frac{1}{3}$$

giustificando i passaggi

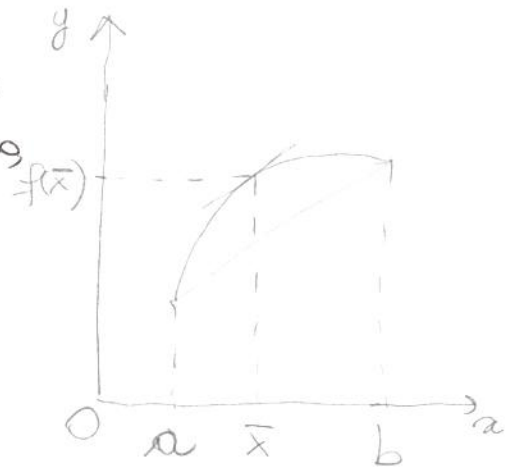
Ris

Teorema di Lagrange

f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b)

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) \text{ t.e. } f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b-a)$$

Se un arco di curva continua è dotato di rette tangenti in ogni suo punto interno, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente è parallela alla corda (secante) che congiunge i punti estremi dell'arco.



Fisso $x > -\frac{1}{3}$, applico il teorema di Lagrange alla funzione $f(t) = \log(1+3t)$ in $[0, x]$ (o in $[x, 0]$) (f continua in $[0, x]$, derivabile in $(0, x)$)
 Risulta: $\log(1+3x) - \log(1) = \frac{1}{1+3\bar{x}} \cdot 3 \cdot x$, $\exists \bar{x} \in (0, x)$

i) Considero $x \geq 0 \Rightarrow \frac{3x}{1+3\bar{x}} \leq 3x$.

ii) Considero $-\frac{1}{3} < x < 0$, $\bar{x} \in (x, 0) \Rightarrow -1 < 3x < 0 \Rightarrow 1+3\bar{x} < 1 \Rightarrow 3x < 3\bar{x} < 0$
 $\Rightarrow \frac{1}{1+3\bar{x}} > 1 \Rightarrow \frac{3x}{1+3\bar{x}} < 3x$. Quindi $\frac{3x}{1+3\bar{x}} < 3x$ $\forall x \in (-\frac{1}{3}, 0)$
 multiplico per $x < 0$

$$\forall x > -\frac{1}{3} \quad \log(1+3x) = \frac{3x}{1+3\bar{x}} \leq 3x$$

$\exists \bar{x} \in (0, x) \text{ o } \bar{x} \in (x, 0)$

Studiare nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

Res

Domínio $\sin x \neq 1 \Rightarrow A = [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

Intersezione con $\begin{cases} x=0 \\ f(x) = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases} (0, -1); \quad \begin{cases} y=0 \\ \frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \end{cases} \begin{matrix} x = \frac{3\pi}{2} \in A \\ x = \frac{\pi}{2} \notin A \end{matrix}$

Segno $\sin x - 1 < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow f(x) > 0 \text{ sse } \cos x < 0$
 $f(x) > 0 \text{ sse } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ ($\frac{3\pi}{2}, 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x - 1} = \frac{0}{0} \text{ f.i.}$$

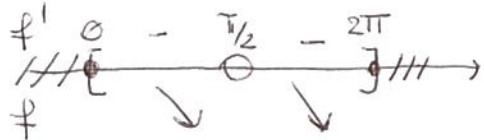
$f = \cos x$, $g = \sin x - 1$ derivabili, infinitesime, $g' = \cos x \neq 0$ in un intorno forato di.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm} \frac{-\sin x}{\cos x} = \pm \infty \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ è asintoto verticale}$$

$$f(0) = -1 \quad (\text{gr. vsto}) \quad f(2\pi) < 0$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x (\sin x - 1) - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} = \frac{1}{\sin x - 1}; \quad f'(x) \neq 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in A \Rightarrow \text{in } [0, \frac{\pi}{2}) \text{ e } (\frac{\pi}{2}, 2\pi] \quad f \text{ è decrescente}$$

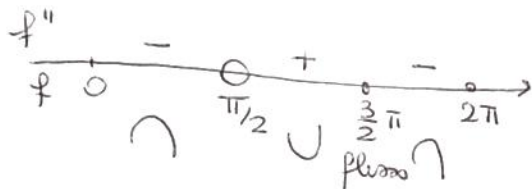


non ci sono né minimi relativi né max relativi

$$f''(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x - 1)^2}$$

$$f''(x) > 0 \text{ per } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$f''(x) < 0 \text{ per } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$$



flessa ($\frac{3\pi}{2}, 0$)



Es. 5. pag. 71

Calcolare, se $\exists$, $\int_1^3 \frac{x}{5\sqrt{x^2-1}} dx$

Definire l'integrale in senso improprio su un intervallo limitato
Enunciare i teoremi di esistenza dell'integrale improprio

Ris

Def. $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall a < x < b \quad \exists \int_x^b f(t) dt$$

f ha integrale improprio convergente se $\exists$ punto $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$

In tal caso si pone (i) $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$

Teorema

Sia $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists \int_a^b f(t) dt \quad \forall a < x < b$

i) se f è limitata in $(a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(t) dt$

ii) se $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \exists \int_a^b f(t) dt$

iii) se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ di ordine α con $\alpha < 1 \Rightarrow \exists \int_a^b f(t) dt$
(di ordine α con $\alpha \geq 1 \Rightarrow \nexists \int_a^b f(t) dt$)

$f(x) = \frac{x}{5\sqrt{x^2-1}}$ è definita in $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

in $(1, +\infty)$ $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ in $(1, 3]$ $f(x) = \frac{x}{5\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \mid 1 < x \leq 3$ f è cont $\Rightarrow \exists \int_1^3 f(t) dt$

$$\int \frac{x}{5\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{5} \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{5} \frac{(x^2-1)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{5} (x^2-1)^{1/2} + c$$

$$\int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{5} \sqrt{x^2-1} \Big|_1^3 = \frac{1}{5} (\sqrt{9-1} - \sqrt{1-1}) = \frac{1}{5} (\sqrt{8} - \sqrt{x^2-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_1^3 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{5} (\sqrt{8} - \sqrt{x^2-1}) \right) = \frac{\sqrt{8}}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$