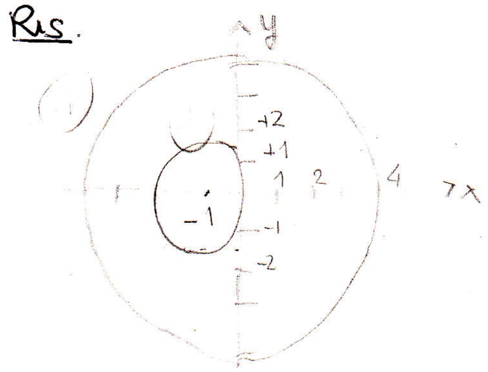
EX Data la funzione $f(x,y) = 2(x+1)^2 + y^2$ e la curva vincolo di equazione $g(x,y) = x^2 + y^2 - 16 = 0$

a) Rappresentare sul piano cartesiano la curva vincolo e la curva di livello della funzione f di equazione $f(x,y) = 2$.

Ris.



vincolo $g(x,y) = x^2+y^2-16=0$ circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $r=4$

curva di livello $f(x,y)=2$ $\quad 2(x+1)^2+y^2=2$

$$\frac{(x-(-1))^2}{1} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$ ellisse di centro $(-1,0)$ e semiassi $a=1$, $b=\sqrt{2}$

b) Scrivere la lagrangiana e determinare gli eventuali punti critici attraverso le condizioni di Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y) = 2(x+1)^2 + y^2 - \lambda(x^2+y^2-16)$$

$$\begin{matrix} L_x \\ L_y \\ -g \end{matrix}\begin{cases} 4(x+1) - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ -(x^2+y^2-16) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x+2-\lambda x = 0 \\ y(1-\lambda) = 0 \; \begin{cases} y=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \\ x^2+y^2-16=0 \end{cases} \text{se} \begin{cases} \lambda = \frac{2x+2}{x} \; \begin{cases} x=-4 & \lambda=\frac{3}{2} \\ x=+4 & \lambda=\frac{5}{2} \end{cases} \\ y=0 \\ x=\pm 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-2 \\ \lambda=1 \\ y=\pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

punti critici: $\left(4, 0, \frac{5}{2}\right), \left(-4, 0, \frac{3}{2}\right), \left(-2, +2\sqrt{3}, 1\right), \left(-2, -2\sqrt{3}, 1\right)$

c) Classificare gli eventuali punti critici trovati attraverso la matrice hessiana orlata.

$L_{xx} = 4 - 2\lambda \qquad L_{xy} = 0 \qquad L_{yy} = 2 - 2\lambda \qquad g_x = 2x \qquad g_y = 2y$

$$\tilde{H}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 4-2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2-2\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 2x \\ 2x & 4-2\lambda \\ 2y & 0 \end{matrix}$$

$$\det \tilde{H}(x,y,\lambda) = 0+0+0-\left(4y^2(4-2\lambda)+0+4x^2(2-2\lambda)\right) = -4y^2(4-2\lambda) - 4x^2(2-2\lambda)$$

$\det\left(4,0,\frac{5}{2}\right) = -4\cdot 4^2\left(2-2\cdot\frac{5}{2}\right) = 4\cdot 4^2\cdot 3 > 0 \Rightarrow \left(4,0,\frac{5}{2}\right)$ punto di max relativo per f sul vincolo g

EX 2 foglio C parte 1